ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°13

À rendre le Mardi 28 Mars

Exercice 1. Une urne contient une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge. On effectue une infinité de tirages successifs. À chaque tirage, on regarde la couleur de la boule obtenue, on la remet ensuite dans l'urne ainsi qu'une boule supplémentaire de chaque couleur non tirée.

(1) En considérant les évènements A_n "on obtient aucune boule rouge au cours des n premiers tirages" ($n \geq 1$), montrer que presque sûrement, on va tirer une boule rouge. On pourra calculer explicitement
$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2k+1}$$
à l'aide de la formule des probabilités composées, et montrer que
$$P(A_n) \leq \frac{2}{n+2},$$
en utilisant que, pour $k \geq 1$, $2k+1 \geq k+2$.

(2) Écrire un programme `SciLab` simulant le tirage de n boules consécutives et affichant la couleur. Le modifier pour qu'il illustre le résultat de la première question.

(3) Écrire un nouveau programme permettant de calculer et d'afficher le rang d'apparition de la première boule rouge.

Exercice 2. On considère, dans $\mathbb{R}^4$,
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

(1) Montrer que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F et sa dimension. De donner l'équation (ou le système d'équations) caractérisant F.

(2) Donner une base du sous-espace G suivant
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, 4x - 2y + t = 0 \right\}.$$

Exercice 3. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser les coordonnées des vecteurs de l'ancienne base dans la nouvelle.