Devoir Maison n°13

Solution

Exercice 1. Une urne contient une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge. On effectue une infinité de tirages successifs. À chaque tirage, on regarde la couleur de la boule obtenue, on la remet ensuite dans l'urne ainsi qu'une boule supplémentaire de chaque couleur non tirée.

(1) On introduit donc, comme suggéré, les évènements A_n "on obtient aucune boule rouge au cours des n premiers tirages" et l'évènement A "on obtient jamais de boule rouge". Il est alors clair que

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

et que la suite (A_n) est décroissante au sens de l'inclusion. Par conséquent,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Il reste à calculer les probabilités $P(A_n)$. Pour cela, on utilise la formule des probabilités composées et le fait que, si on a jamais obtenu de rouge, on en a rajouté une (ainsi qu'une non rouge) à chaque tirage successif, ou encore

$$P_{A_{k-1}}(A_k) = \frac{2+(k-1)}{3+2(k-1)} = \frac{k+1}{2k+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \\
&= P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times ... \times P_{A_{n-1}}(A_n) \\
&= \frac{2}{3}\prod_{k=2}^{n} P_{A_{k-1}}(A_k) \\
&= \frac{2}{3}\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{2k+1} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2k+1} \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} \qquad \text{(car } 2k+1 \geq k+2\text{)} \\
&= \frac{2}{n+2}
\end{aligned}$$

donc
$$0 \leq P(A_n) \leq \frac{2}{n+2}$$
et par le théorème des gendarmes,
$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0.$$
Ainsi, presque sûrement, on tira une boule rouge.

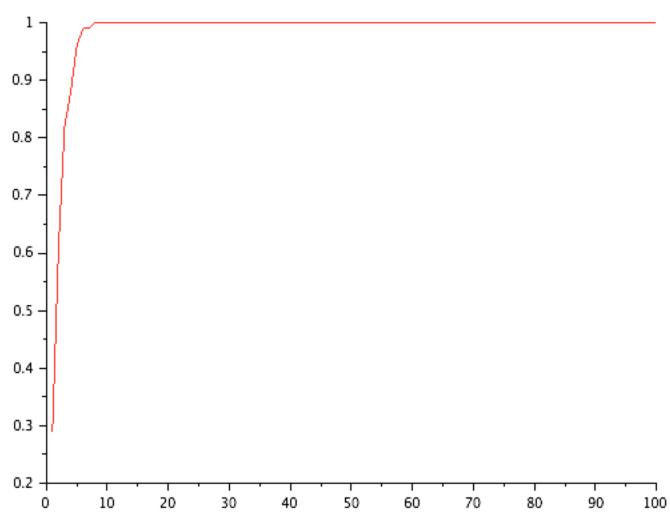
(2) Le premier programme proposé simule le tirage et affiche la couleur de la boule obtenue. Afin de voir que presque sûrement on va tirer une boule rouge, on propose un deuxième programme, sous forme de fonction, qui renvoie 1 qui une boule rouge a été tirée au moins une fois lors de n tirages. Puis, on fait une moyenne empirique, pour 100 réalisations de n tirages et on représente l'évolution de cette moyenne empirique en fonction des variations de n. On observe que l'on se rapproche de 1 dès que n est assez grand.

```
n=input('Preciser nombre de tirages: ');
r=1; //nombre de boules rouges initialisé à 1
b=1; //nombre de boules bleues
B=1; //boules blanches
T=r+b+B; //total de boules
for k=1:n
    p=rand();
    if p<= r/T then
        disp('boule rouge')
        b=b+1;
        B=B+1;
    end
    if p>r/T & p<= (r+b)/T then
        disp('boule bleue')
        r=r+1;
        B=B+1;
    end
    if p>(r+b)/T then
        disp('boule blanche')
        r=r+1;
        b=b+1;
    end
    T=r+b+B;
end
```

```
function y=tirageDM13(n)
    r=1; //nombre de boules rouges initialisé à 1
    b=2; //nombre de boules bleues ou blanches;
    T=r+b;
    y=0; //on compte le nombre de tirages rouges
    for k=1:n
        p=rand();
        if p<= r/T then
            b=b+2;
            y=1;
        else
            r=r+1;
            b=b+1;
        end
        T=T+2;
    end
endfunction

function y=frequence_rouge(n)
    y=0;
    for k=1:100
        y=y+tirageDM13(n);
    end
    y=y/100;
endfunction

x=1:100;
Y=feval(x,frequence_rouge);
plot2d(x,Y, style=5)
```



(3) Il suffit d'intégrer une boucle `while` et un compteur dans les programmes précédents (Attention, ici la fonction ne prend pas d'argument!):

```
function y=first_red()
    r=1; //nombre de boules rouges initialisé à 1
    b=2; //nombre de boules bleues ou blanches;
    T=r+b;
    n=1; //nombre de tirages
    while rand()> r/T
        n=n+1;
        r=r+1;
        T=T+2;
    end
    y=n;
endfunction
```

Exercice 2. On considère, dans $\mathbb{R}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

(1) Pour montrer que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2, il suffit de trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Ainsi,

$$v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu & = & 1 \\ 3\lambda + 7\mu & = & 2 \\ -2\lambda - 5\mu & = & -1 \\ 2\lambda + 6\mu & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 3 \\ \mu & = & -1 \end{array} \right.$$

Donc $v_3 = 3v_1 - v_2$ et $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$. Comme ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, il forment une base de F qui est donc de dimension 2. De plus,

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ v = \lambda u_1 + \mu u_2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu & = & x \\ 3\lambda + 7\mu & = & y \\ -2\lambda - 5\mu & = & z \\ 2\lambda + 6\mu & = & t \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 7x - 2y \\ \mu & = & y - 3x \\ z & = & -2(7x - 2y) - 5(y - 3x) = x - y \\ t & = & 2(7x - 2y) + 6(y - 3x) = -4x + 2y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a le système d'équation caractérisant F:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x - y - z = 0 \quad \text{et} \quad 4x - 2y + t = 0 \right\}.$$

(2) D'après la définition de G

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G \iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -4x+2y \end{pmatrix}$$
$$\iff v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs intervenant dans la décomposition précédente formant clairement une famille libre, ils forment une base de G et on a

$$G = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3. Il faut montrer que la seule combinaison linéaire qui annule les trois vecteurs de la nouvelle base est celle dont les trois coefficients sont nuls. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\lambda u_1 + \mu(u_1+u_2) + \gamma(u_1+u_2+u_3) = 0 &\iff (\lambda+\mu+\gamma)u_1 + (\mu+\gamma)u_2 + \gamma u_3 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu+\gamma &=& 0 \\ \mu+\gamma &=& 0 \\ \gamma &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{car } \{u_1,u_2,u_3\} \text{ libre (car base)} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0 \\ \mu &=& 0 \\ \gamma &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre. Comme on a trois vecteurs et que l'espace est de dimension de 3 (car la première base comporte elle aussi trois vecteurs), ces trois nouveaux vecteurs forment bien une base également.

On voit de plus que

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1 + 0(u_1+u_2) + 0(u_1+u2+u_3) \\
u_2 &= -u_1 + (u_1+u_2) + 0(u_1+u2+u_3) \\
u_3 &= 0u_1 - (u_1+u_2) + (u_1+u2+u_3)
\end{aligned}$$

Donc les nouvelles coordonnées sont:

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (-1,1,0), \quad \text{et} \quad u_3 = (0,-1,1).$$