ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°14

À rendre le 25 Avril

Exercice 1. On dit d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qu'il est **diagonalisable** si il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (non nécessairement distincts) et une base $\mathfrak{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f(u_i) = \lambda_i u_i.$$

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ est diagonale.

(1) (a) Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et v tels que $f(v) = \lambda v$. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $f^k(v) = f \circ ... \circ f(v) = \lambda^k v$.
  (b) Montrer alors que, si un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est encore diagonalisable dans la même base. (On pourra alors expliciter les coefficients diagonaux correspondants).

Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque (à la dernière question) est fausse, c'est à dire que le carré d'un endomorphisme peut être diagonalisable sans que celui-ci le soit. On considère pour cela g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est notée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) Déterminer A^2 puis, montrer que $A^4 = I$.
(3) (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(v) = \lambda v$. En utilisant la question précédente et la Question (1)(a), montrer que $\lambda = 1$ ou que $\lambda = -1$.
  (b) En déduire que si g est diagonalisable, on pourra trouver une base $\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q\}$ de $\mathbb{R}^3$ (avec $p + q = 3$) telle que $g(u_i) = u_i$ et $g(v_j) = -v_j$.
  (c) Montrer aussi que, pour tous les u_i sont des éléments de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ et les v_j des éléments de $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.

(4) Donner une base $\{u\}$ de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.
(5) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.
(6) Montrer qu'alors, g n'est pas diagonalisable.

(7) Résoudre l'équation $A^2 X = -X$ (où X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$). En déduire une base $\{v; w\}$ de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$.
(8) Montrer que la famille $\{u; v; w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(9) Écrire la matrice de g^2 dans la base $\{u; v; w\}$. Conclure.

Exercice 2. Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. (On peut appeler X_N le "nombre de changements" au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement *Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile*, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

(1) Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, \cdots, N-1]\!]$.
(2) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
(3) Montrer que

$$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

et que

$$P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}.$$

(4) (a) Justifier que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

(c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que

$$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$

(d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

(e) En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.

Exercice 3. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

Écrire une fonction sous `SciLab`, prenant en argument l'entier n, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z.