Solution

À rendre le 25 Avril

Exercice 1. (D'après **EDHEC 2012**)

(1) (a) Pour $k=1$, c'est immédiat. Supposons alors que, pour un certain $k \geq 1$, $f^k(v)=\lambda^k v$. Alors,

$$f^{k+1}(v)=f\circ f^k(v)=f\left(f^k(v)\right)=f\left(\lambda^k v\right)=\lambda^k f(v)=\lambda^k\cdot\lambda v=\lambda^{k+1}v,$$

ce qui est la bien la propriété au rang $k+1$. La récurrence est ainsi terminée.

(b) Si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathfrak{B}=\{u_1,...,u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que

$$\forall i\in [\![1;n]\!],\quad f(u_i)=\lambda_i u_i.$$

Mais alors, pour chaque i entre 1 et n,

$$\begin{aligned} f^2(u_i) &= f\circ f(u_i)=f(\lambda_i u_i)=\lambda_i f(u_i) \\ &= \lambda_i^2 u_i. \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs de la base $\mathfrak{B}$ ont la même propriétés (on dit qu'ils sont *vecteurs propres* de f - et de f^2) mais cette fois avec les carrés des coefficients précédents. L'endormorphisme f^2 est alors encore diagonalisable.
En d'autres termes, la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ sera diagonale

$$\mathrm{Mat}(f,\mathfrak{B})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

et celle de f^2 aussi

$$\mathrm{Mat}(f^2,\mathfrak{B})=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2\end{pmatrix}.$$

On considère donc l'endormorphisme g de R^3, dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & -5 & 4\\ 3 & -8 & 6\end{pmatrix},$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) Ces calculs sont faciles, il suffit juste de les faire

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I.$$

(3) (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(v) = \lambda v$. D'après la question précédente, $g^4(v) = I(v) = v$. Mais, on a aussi

$$g^4(v) = g^3 \circ g(v) = g^3(\lambda v) = \lambda g^3(v) = \lambda g^2 \circ g(v) = \lambda^2 g^2(v) = ... = \lambda^4 v.$$

Comme $\lambda^4 v = v$ et que le vecteur v est non nul, il suit que

$$\lambda^4 = 1 \iff (\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1).$$

(b) Si g est diagonalisable, il existe alors des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et une base $\mathfrak{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $g(w_i) = \lambda_i w_i$. Or, d'après la question précédente, ces réels λ_i, ne peuvent être égaux qu'à 1 ou -1. On les regroupe donc en deux parties: ceux égaux à 1, et on renomme les vecteurs correspondants u_i, et ceux égaux à -1 (et on renomme les vecteurs correspondants v_i). S'il y a p éléments dans le premier groupe et q dans le deuxième, on a bien $p + q = 3$.

(c) Comme on a $g(u_i) = u_i$, il est clair que $g(u_i) - u_i = (g - \mathrm{Id})(u_i) = 0$ et les u_i sont bien dans le noyau de $g - \mathrm{Id}$. Par le même raisonnement ultra-simple, les v_i sont des éléments du noyau de $g + \mathrm{Id}$.

On remarque qu'on a donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})) = p + q = 3.$$

(4) On cherche une base en résolvant le système correspondant:

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z &=& 0 \\ 2x - 6y + 4z &=& 0 \\ 3x - 8y + 5z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z \\ &\iff u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc

$$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Avec les notations précédentes, on constate que $p = 1$.

(5) On procède de la même manière pour déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& 0 \\ 2x - 4y + 4z &=& 0 \\ 3x - 8y + 7z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\operatorname{Ker}(g+\operatorname{Id})=\{0\}$$

et avec les notations précédentes, $q=0$.

(6) Par les questions précédentes, si g est diagonalisable, alors $p+q=3$. Or, ici, $p+q=1+0=1\neq 3$. Donc, g ne peut pas être diagonalisable.

(7) On résout $A^2X=-X$:

$$\begin{aligned}
u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\operatorname{Ker}(g^2+\operatorname{Id}) &\iff \begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff 2x-2y+2z=0\\
&\iff u=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

engendrent donc $\operatorname{Ker}(g^2+\operatorname{Id})$. Étant de plus non colinéaires, ils en forment donc une base. On le snote respectivement v et w.

(8) Pour montrer que la famille $\{u;v;w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre.

$$\begin{aligned}
\alpha u+\beta v+\gamma w=0 &\iff \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta-\gamma&=&0\\ \alpha+\beta&=&0\\ \alpha+\gamma&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(9) Par définitions des vecteurs u,v,w on a $g^2(u)=g(g(u))=g(u)=u$, $g^2(v)=-v$ et $g^2(w)=-w$. Il suit que la matrice de g^2 dans cette nouvelle base est donnée par

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

et c'est une matrice diagonale. Ainsi, g^2 est diagonalisable. Or, on a montré que g ne l'était pas, justifiant ainsi que la réciproque à la toute première question est fausse via ce contre-exemple.

Exercice 2. (D'après **ESC 2004**) On note P_i (resp. F_i) l'évènement correspondant au fait d'obtenir *Pile* (resp. *Face*) au $i-$ème lancer.

(1) Le premier changement peut avoir lieu au second lancer au plus tôt. Au maximum, on aura N-1 changements. Donc $X_N(\Omega)=\{0,\cdots,N-1\}$.

(2) D'après l'observation précédente, on a en particulier $X_2\left(\Omega\right)=\{0,1\}$.

- $(X_2 = 0)$ signifie que l'on a pas de changement: deux *Pile* ou deux *Face*. Ainsi, $(X_2 = 0) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$ qui sont incompatibles; et les deux lancers sont indépendants donc
$$\mathrm{P}(X_2 = 0) = \mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}(P_2) + \mathrm{P}(F_1)\,\mathrm{P}(F_2) = \frac{1}{2}.$$
- $(X_2 = 1) = \overline{(X_2 = 0)}$ donc $\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

La loi de X_2 est donc donnée par

k	0	1	
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$k\mathrm{P}(X_2 = k)$	0	$\frac{1}{2}$	$E(X_2) = \frac{1}{2}$

On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec comme précédemment
- $(X_3 = 0) = P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3$ d'où $\mathrm{P}(X_3 = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

- $(X_3 = 1)$ donne un seul changement qui peut survenir au second ou au troisième lancer; le premier donnant *Pile* ou *Face*. Donc
$$(X_3 = 1) = P_1P_2F_3 \cup P_1F_2F_3 \cup F_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3$$
et
$$\mathrm{P}(X_3 = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$
- $(X_3 = 2)$ si on change à chaque lancer. Donc
$$(X_3 = 2) = P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3$$
et
$$\mathrm{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Et la loi de X_3 est donnée par

k	0	1	2	total
$\mathrm{P}(X_3 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(3) L'évènement $(X_N = 0)$ signifie que l'on n'a aucun changement (tous les lancers donnent *Pile* ou bien tous donnent *Face*). Donc
$$\mathrm{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

D'autre part, $(X_N = 1)$ signifie que l'on n'a qu'un seul changement, qui peut survenir du second au $N-$ième lancer. Le premier lancer étant *Pile* ou *Face*,
$$(X_N = 1) = \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \bigcap_{i=k}^{N} P_i\right) \cup \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} P_i \bigcap_{i=k}^{N} F_i\right)$$
La réunion est disjointe et les lancers sont indépendants donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_N = 1) &= \sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(F_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(P_i)\right) + \sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(P_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(F_i)\right)\\ &= 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N.\end{aligned}$$

(4) (a) Pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, si $(X_N = k)$, on a alors eu k changements en N lancers.

Pour en avoir le même nombre en $N+1$ lancers, il faut avoir la même face du dé au $N+1^{ème}$ qu'au précédent, ce qui a une chance sur deux de se réaliser. Donc

$$\mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}.$$

(b) Et pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k\right) &= \mathrm{P}_{X_N=k}\left(X_{N+1} - X_N = 0\right) \mathrm{P}\left(X_N = k\right) \\
&= \mathrm{P}_{X_N=k}\left(X_{N+1} = k\right) \mathrm{P}\left(X_N = k\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{P}\left(X_N = k\right).
\end{aligned}$$

(c) $(X_N = k)_{0 \leq k \leq N_1}$ étant un système complet d'événements, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_{N+1} - X_N = 0\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{P}\left(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{P}\left(X_N = k\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(d) $X_{N+1} - X_N$ prend les valeurs $\{0, 1\}$ car en un lancer on a au plus un changement de plus.

$$\mathrm{P}\left(X_{N+1} - X_N = 1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X_{N+1} - X_N = 0\right) = \frac{1}{2}$$

donc $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On a donc

$$E\left(X_{N+1} - X_N\right) = \frac{1}{2}$$

d'où

$$E\left(X_{N+1}\right) - E\left(X_N\right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

et

$$E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N).$$

La suite $\left(E\left(X_n\right)\right)_{n \geq 2}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $E\left(X_2\right) = \frac{1}{2}$ donc

$$E\left(X_N\right) = (N-2)\frac{1}{2}.$$

Exercice 3. (D'après **EDHEC 2004**) On propose la fonction `SciLab` suivante. On simule le lancer de la pièce par une loi uniforme sur $\{0; 1\}$ en associant à *Pile* la valeur 1.

```
function y=EDHEC2004(n)
    y=0;
    i=1; // on initialise le rang du lancer
    while y=0 & i<n //tant qu'il n'y a pas de Pile et qu'on lance la pièce
        r=floor(2*rand());
        if r==1 then
            y=i;
        end
        i=i+1;
    end
endfunction
```