Devoir Maison n°15

À rendre le 3 Mai

Exercice 1. On dispose que n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une des urnes et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. Si $X = k$, on tire au hasard une boule dans l'urne k et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule choisie.

(1) Quelle est la loi de X?
(2) Que vaut $Y(\Omega)$?
(3) Pour $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, déterminer $P_{(X=k)}(Y = j)$ (on distinguera les cas $k \geq j$ et $k < j$).
(4) En déduire une expression de $P(Y = j)$ faisant intervenir une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
(5) Calculer $E(Y)$.

Exercice 2. (D'après **EML 2017**) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante: on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur de celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k : "la boule tirée au $k-$ième tirage est bleue" et R_k l'évènement: "la boule tirée au $k-$ième tirage est rouge".

Partie I - Simulation informatique

(1) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, n étant l'entier entré en argument.

```
function s=EML(n)
    b=1; // b représente le nombre de boules bleues dans l'urne
    r=2; // r représente le nombre de boules rouges dans l'urne
    s=0; // s représente le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand();
        if  ................. then
            .................
        else
            .................
        end
    end
endfunction
```

(2) On exécute le programme suivant:

```
n=10;
m=0;
for i=1:1000
    m=m+EML(n);
end
disp(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat?

Partie II - Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? Une variance?

(4) Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? Une variance?