ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°15

Solution

Exercice 1.

(1) La variable aléatoire X est égale au numéro de l'urne qu'on choisit au hasard, on reconnait la loi uniforme: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. En particulier, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = 1/n$.

(2) La variable aléatoire Y est égale au numéro de la boule tirée qui peut donc être n'importe quelle valeur entre 1 et n. Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

(3) Si $X = k$, cela signifie qu'on tire une boule dans l'urne k. Si $j \in [\![1;k]\!]$, alors la boule numéro j est bien dans l'urne dans laquelle on tire et sa probabilité d'être tirée est $1/k$. Si $j > k$, la boule numéro j n'est pas dans l'urne et ne peut être tirée. En conclusion,

$$P_{(X=k)}(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{si } j > k \end{cases}$$

(4) On utilise alors la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X=k) : \ 1 \leq k \leq n\}$. Soit $j \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{k=1}^{n} P_{(X=k)}(Y=j)P(X=k) \\ &= \sum_{k=j}^{n} P_{(X=k)}(Y=j)P(X=k) \\ &= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(5) Le calcul de l'espérance de Y est alors un calcul de somme double qui représente un excellent exercice:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{kn} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{kn} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{k} j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}\cdot\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2. (D'après **EML 2017**) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante: on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur de celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k : "la boule tirée au $k-$ième tirage est bleue" et R_k l'évènement: "la boule tirée au $k-$ième tirage est rouge".

Partie I - Simulation informatique

(1) Le programme ne pose aucune difficulté:

```
function s=EML(n)
    b=1; // b représente le nombre de boules bleues dans l'urne
    r=2; // r représente le nombre de boules rouges dans l'urne
    s=0; // s représente le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand();
        if  x<r/(r+b) then //si on tire une rouge
            s=s+1; // le nombre de boules rouges obtenues augmente de 1
            r=r+1; // on rajoute une boule rouge dans l'urne
        else
            b=b+1; // sinon, on rajoute une boule bleue dans l'urne
        end
    end
endfunction
```

(2) Les instructions permettent d'afficher la moyenne empirique (*i.e* observée) sur 1000 simulations de la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues après 10 tirages. Notant X cette variable aléatoire, on peut donc supposer que $E(X) \simeq 6.657$.

Partie II - Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) (a) Si $Y = n$, cela veut dire que les $n-1$ premiers tirages ont donné une boule rouge. Plus précisement,

$$(Y = n) = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n.$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P\left(R_{n-1} \mid \bigcap_{k=1}^{n-2} R_k\right) P\left(B_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} R_k\right).$$

Mais, si on a $\bigcap_{k=1}^{j} R_k$ cela veut dire qu'on a déjà tiré j boules rouges, et qu'on en a donc rajouté j dans l'urne menant le total de boules rouges à $2+j$, ainsi

$$P\left(R_{j+1} \mid \bigcap_{k=1}^{j} R_k\right) = \frac{2+j}{3+j}.$$

D'autre part,

$$P\left(B_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} R_k\right) = \frac{1}{3+n-1} = \frac{1}{n+2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \frac{2}{3}\left(\prod_{j=1}^{n-2} \frac{2+j}{3+j}\right) \times \frac{1}{n+2} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-2} \frac{2+j}{2+(j+1)}\right) \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on attendait.

(b) La variable aléatoire Y admet une espérance si la série de terme général $n \cdot P(Y=n)$ est convergente, c'est à dire si la série de terme général

$$\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

est convergente. Mais, ce n'est pas le cas. Un argument peut être de voir que

$$\frac{2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} \times \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$$

et d'utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ étant une série (de Riemann) divergente. La variable aléatoire Y n'admet donc pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance non plus.

(4) Il est clair que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Le même raisonnement que précédemment permet d'écrire que

$$P(Z=n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P\left(B_{n-1} \mid \bigcap_{k=1}^{n-2} B_k\right) P\left(R_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right).$$

Ici, $P(B_1) = 1/3$,

$$P\left(B_{j+1} \mid \bigcap_{k=1}^{j} B_k\right) = \frac{1+j}{3+j},$$

et

$$P\left(R_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) = \frac{2}{3+n-1} = \frac{2}{n+2}.$$

Au final,

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \frac{1}{3}\left(\prod_{j=1}^{n-2}\frac{1+j}{3+j}\right)\times\frac{2}{n+2} \\
&= \left(\prod_{j=0}^{n-2}\frac{1+j}{1+(j+2)}\right)\times\frac{2}{n+2} \\
&= \frac{1\times 2}{n(n+1)}\times\frac{2}{n+2} \\
&= \frac{4}{n(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Cette fois, la variable Z admet une espérance. En effet, la série de terme général $nP(Z=N)$ est convergente car

$$nP(Z=n)=\frac{4n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}\leq\frac{4}{n^2}$$

et le critère de comparaison des séries à termes positifs s'applique (car la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente). En revanche, Z n'admet pas de variance car elle n'admet pas de moment d'ordre 2: la série de terme général $n^2P(Z=n)$ diverge pour la même raison que la série de terme général $nP(Y=n)$ diverge.