ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°16

À rendre le 2 Juin

Exercice 1.

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{ M(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

(1) (a) Montrer que la matrice nulle est élément de E. Montrer de plus, que si M et N sont deux matrices éléments de E, et si λ, μ sont deux réels quelconques, alors $\lambda M + \mu N$ est encore une matrice élément de E. *On vient de montrer que E etait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

(b) Montrer que si M est une matrice élément de E, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \lambda A + \mu B$. *On vient de montrer que $\{A, B\}$ formait une base de E qui est donc de dimension 2.*

(2) Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$AP = PD_A \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

(4) En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.
En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}.$$

(5) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

(6) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

(7) Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(1) Que vaut X_0 ?

(2) Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

(4) À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(a) Étudier les variations de la fonction g_0: préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut $M_n = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} g_n(x) = 0.$$

(2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x), & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?
(c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?
(d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

(f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. On dit que X et Y sont *échangeables* si, pour tous entiers $i, j \in \{1, ..., N\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

(1) Montrer que si X et Y sont échangeables, alors elles suivent la même loi.
(2) On dit que X et Y sont *indépendantes* si, pour tous $i, j \in \{1, ..., N\}$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j).$$

Montrer que si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.

(3) L'exemple suivant vise à montrer que la réciproque est fausse. Soient n, b, c trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On pioche une boule dans l'urne. On définit une première variable aléatoire X comme suit. Si la boule est est noire, alors $X = 1$ sinon $X = 2$.
(a) Écrire en langage `SciLab`, une fonction `tirage(n,b)` simulant la variable X.
(b) Déterminer la loi de X.

On remet la boule tirée dans l'urne ainsi que c boules supplémentaires de la couleur tirée. On tire une seconde boule et on introduit la variable aléatoire Y qui vaut 1 si la nouvelle boule tirée est noire et 2 sinon.

(c) Déterminer la loi de Y.
(d) Montrer que X et Y sont échangeables.
(e) Sont-elles indépendantes?