ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1.

(1) Non, l'inégalité est fausse! Pour le justifier, on peut par exemple exhiber un contre-exemple, comme
$$|-3| = 3 > 2 = |-3+1|.$$
On aurait aussi pu résoudre l'inégalité et voir qu'elle ne fonctionnait pas partout, ce qui l'empêche donc d'être vraie (partout):
$$|x| \leq |x+1| \iff x^2 \leq (x+1)^2 \iff 2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$$

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On voit assez rapidement, qu'il va falloir différencier deux cas, suivant la position de x par rapport au milieu de l'intervalle (de longueur 1):

⋆ **1er cas:** $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$. On constate alors que
$$\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + 1.$$
Ainsi, $\lfloor x \rfloor$ reste le plus grand entier inférieur ou égal à $x + 1/2$ et est donc égal à sa partie entière:
$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor,$$
ce qui donne
$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor.$$
Mais, toujours grâce à l'hypothèse ci-dessus,
$$2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right) = 2\lfloor x \rfloor + 1,$$
ce qui assure bien que $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ et donne bien, dans ce premier cas, l'égalité demandée.

⋆ **2ème cas:** $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Il suit alors que
$$\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \frac{3}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$$
et donc
$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

puis

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1.$$

Mais, ici, on a

$$2\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right) = 2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2(\lfloor x \rfloor + 1) = 2\lfloor x \rfloor + 2$$

et donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, ce qui permet bien, dans ce cas aussi, de retrouver l'égalité souhaitée et termine la démonstration.

Exercice 2.

(1) Afin que l'expression de f ait bien un sens, il faut d'une part que la racine soit bien définie (c'est à dire que $x \geq 0$) mais aussi que le dénominateur ne s'annule pas. Or,

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x} - 2 = 0 &\iff \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X^2 + X - 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X = 1 \text{ ou } X = -2 \end{cases} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Au final, on a

$$\mathcal{D}_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

(2) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Dans la question précédente, on a implicitement pu voir que, pour tout X réel, on peut factoriser $X^2 + X - 2$:

$$X^2 + X - 2 = (X + 2)(X - 1).$$

Ceci étant vrai pour tout X réel, on peut alors l'appliquer pour $X = \sqrt{x}$ (où $x \in \mathcal{D}_f$) pour obtenir la factorisation du dénominateur

$$x + \sqrt{x} - 2 = \left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} - 1\right).$$

Pour maintenant factoriser le numérateur, qui est un polynôme du second degré, on cherche ses racines (*via* calcul de son discriminant). On obtient en deux temps trois mouvements

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Or, x étant positif, on peut utiliser une identité remarquable connue sur le bout des doigts, pour écrire

$$x - 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right).$$

Par une simplification évidente, on a donc bien, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(x - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 2)}.$$

(3) D'après les questions précédentes,

$$\forall x \in [0; 2] \setminus \{1\}, \qquad \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| = \frac{|x - 2| \cdot (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 2}.$$

Mais, comme $\sqrt{x} + 1 \leq \sqrt{x} + 2$, il suit directement que

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \leq 1.$$

D'autre part, si $x \in [0; 2]$, alors $|x - 2| = 2 - x \leq 2$. En conclusion,

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| \leq |x - 2| \leq 2,$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Exercice 3. Soient x, y deux réels positifs.

(1) On va comparer les carrés des éléments intervenant dans l'inégalité considérée. D'une part,
$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = x+y+2\sqrt{xy}$$
et d'autre part
$$\sqrt{x+y}^2 = x+y.$$
Comme $\sqrt{xy} \geq 0$, il est clair que
$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq \sqrt{x+y}^2.$$
Mais les deux quantités initiales étant toutes deux positives, on a donc bien
$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \geq \sqrt{x+y}.$$

(2) Si $x \geq y$, il suffit d'appliquer l'inégalité précédente en remplaçant x par $x-y$ (qui est donc bien une quantité positive). Cela donne
$$\sqrt{x} = \sqrt{x-y+y} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$$
ou encore
$$\sqrt{x-y} \geq \sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

(3) D'après ce qui précède, si $x \geq y$, on a $|x-y| = x-y$ (car $x-y \geq 0$) et donc
$$\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}.$$
Mais la fonction racine étant croissante, on a aussi $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ et donc
$$-\sqrt{|x-y|} = -\sqrt{x-y} \leq 0 \leq \sqrt{x}-\sqrt{y}.$$
En combinant tout cela, on obtient
$$-\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$$
ce qui est équivalent à
$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$
En permutant dans le raisonnement des deux questions précédentes les rôles de x et y, on obtient le même encadrement dans le cas où $y \geq x$, ce qui termine la démonstration.

Exercice 4. (`SciLab`) On propose le programme suivant:

```
d=input('Entrer distance parcourue (km): ');
m=input('Entrer durée de la course: minutes: ');
s=input('secondes: ');
r=(m+s/60)/d; //on calcule le rythme en exprimant le temps sous forme décimale
if r<=4.5 then // 4min30 secondes représentent 4.5 minutes
    disp('Très bonne session, bravo!')
end
if r>4.5 & r<=5 then
    disp('Session acceptable')
end
if r>5 then
    disp('Trop mou, il faut se secouer!')
end

//on peut même peaufiner en affichant le rythme

M=floor(r);
S=floor((r-floor(r))*60); //on arrondit à la seconde près
disp(' secondes par kilomètre', S, ' minutes et ', M, 'Le rythme est de ')
```

Exercice 5. Pour résoudre cet exercice de logique, il faut successivement supposer que les assertions des différents protagonistes sont vraies jusqu'à aboutir à la réponse souhaitée ou à une contradiction. Auquel cas, la dernière hypothèse établie se retrouve fausse et on recommence le procédé avec le changement d'hypothèse correspondant.

On commence donc par supposer vrai l'intervention de Jean-Michel. On suppose donc d'une part que c'est un élève qui dit la vérité, mais aussi que le coupable est Jean-Claude ou Jean-Marie.

Supposons ensuite que Jean-Claude dit également la vérité. Pour que cela reste compatible avec la précédente hypothèse, cela implique que le coupable est nécessairement Jean-Marie.

Supposons ensuite que Jean-Marie dit aussi la vérité. Son intervention est alors en contradiction avec les deux hypothèses précédentes. On ne peut donc pas garder cette hypothèse. Ainsi, Jean-Marie ment.

L'hypothèse suivante que Jean-Yves dise la vérité n'entre pas en contradiction avec les hypothèses et conclusions déjà établies. Ainsi, le nombre d'élèves disant la vérité s'élève à 3. Cela implique nécessairement que le dernier ment.

Ce qui dit alors Jean-Paul est faux, c'est à dire que Jean-Yves ne ment pas, il dit la vérité, et c'est bien ce que l'on a supposé.

On a donc bien 2 menteurs et 3 élèves fiables et on sait que c'est ce vilain Jean-Marie qui a écrit sur le tableau!