ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°2

À rendre le 4 Octobre

Exercice 1. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2).$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition et les limites, aux bords de celui-ci, de g.
(2) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.
(3) À l'aide de l'étude de la *dérivée seconde* de g, montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.
(4) Écrire, sous `SciLab`, une fonction `y=g(x)` permettant de faire appel à la fonction g. Écrire ensuite un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier naturel k et affiche le plus petit entier n tel que $g(n) \geq 10^k$.

Exercice 2. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $x \in [0;1]$, $1 - nx \leq (1-x)^n$.

Exercice 3. (Suites, récurrences et `SciLab`).

⋆ **Partie 1.** On considère les suites (u_n) et (w_n) définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} u_0 & = -1 \\ u_1 & = -1 \\ u_{n+2} & = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{n+1} - u_n \quad .$$

(1) Que fait le script suivant?

```
u=-1;
v=-1;
w=v-u;
disp(w)
for i=1:9
    x=i*v-(i+1)*u;
    u=v;
    v=x;
    w=v-u;
    disp(w)
end
```

(2) À l'aide des dix premiers termes de (w_n), établir une conjecture sur l'expression de son terme général.
(3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k$.
(4) Déduire des deux questions précédentes une conjecture sur l'expression du terme général de (u_n).
(5) Démontrer, par récurrence, la formule obtenue à la question précédente pour u_n.

⋆ **Partie 2.** On considère maintenant les deux suites (a_n) et (b_n) définies, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 6 \\ a_{n+2} & = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{a_n}{3^n} \quad .$$

(1) En s'inspirant du script précédent, écrire une suite d'instructions permettant d'afficher les douze premiers termes de la suite (b_n).

(2) Établir une conjecture sur l'expression du terme général de (b_n) à partir de ces douze premiers termes.

(3) En déduire une conjecture, puis la démontrer par récurrence, sur l'expression du terme général de (a_n).