ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Devoir Maison n°2

*Solution*

**Exercice 1.** On considère la fonction $g$ définie par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2).$$

(1) L'exponentielle, comme tout polynôme, étant définie partout, la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$. Une croissance comparée donne $g(x) \longrightarrow -\infty, x \to -\infty$ tandis que la simple algèbre des limites donne $g(x) \longrightarrow +\infty, x \to +\infty$.

(2) On compare donc $g(x)$ à $x$, en $+\infty$, en regardant la limite du rapport $g(x)/x$. On voit que

$$\frac{g(x)}{x} = e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 1 + \frac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, la courbe représentative de $g$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ en $+\infty$. Par ailleurs,

$$\frac{g(x)}{x} = e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 1 + \frac{2}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$g(x) - x = e^x(x-2) + 2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote (oblique) à la courbe en $-\infty$.

(3) La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = (x-1)e^x + 1$.

Étudier le signe de $g'(x)$ n'est pas facile. On va donc dériver à nouveau l'expression (que l'on peut encore une fois de plus dériver sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$). On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x)(g')'(x) = xe^x$, dont on trouve facilement le signe. On dresse alors un tableau complet:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

En particulier, on voit bien que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

(4) On propose le script suivant:

```
function y=g(x)
    y=(x-2)*exp(x)+(x+2)
endfunction

k=input('Entrer un entier naturel :');
n=0;
while g(n)<10^k
    n=n+1;
end
disp(n, 'Le nombre entier recherché est ')
```

**Exercice 2.** Comme on procède par récurrence, on commence par tester la propriété pour $n = 0$. Or, il est clair que, pour tout $x \in [0; 1]$, on a bien $1 - 0 \times x = 1 \leq (1 - x)^0 = 1$.

Supposons donc que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\forall x \in [0; 1], \qquad 1 - nx \leq (1 - x)^n.$$

On veut alors montrer que, toujours pour tout $x \in [0; 1]$,

$$1 - (n + 1)x \leq (1 - x)^{n+1}.$$

Or,

$$\begin{array}{rcll} (1-x)^{n+1} & = & (1-x)(1-x)^n & \\ & \geq & (1-x)(1-nx) & \text{par Hypothèse de Récurrence } \textbf{et} \text{ car } (1-x) \geq 0 \\ & = & 1 - nx - x + nx^2 & \\ & = & 1 - (n+1)x + nx^2 & \\ & \geq & 1 - (n+1)x & \text{car } nx^2 \geq 0. \end{array}$$

On a bien l'inégalité souhaitée, ce qui termine la démonstration du caractère héréditaire de la propriété et par conséquent, la démonstration.

**Exercice 3.** (Suites, récurrences et `SciLab`).

⋆ **Partie 1.** On considère les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} u_0 & = -1 \\ u_1 & = -1 \\ u_{n+2} & = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{n+1} - u_n \quad .$$

(1) Le script permet de calculer et d'afficher les dix premiers termes de la suite $(w_n)$

(2) Au vu des dix premiers termes de la suite $(w_n)$, on peut conjecturer que $w_n = 2n$.

(3) On calcule en utilisant la somme des entiers consécutifs, formule que l'on connait déjà sur le bout des doigts

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2k = 2\sum_{k=0}^{n-1} k = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

(4) Si on suppose que $w_n = u_{n+1} - u_n = 2n$, on peut déterminer $u_n$ par somme télescopique:

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2k = n(n-1).$$

Comme $u_0 = -1$, il suit que

$$u_n = n(n-1) + u_0 = n(n-1) - 1.$$

(5) Attention, il faut ici utiliser le principe de récurrence double. On commence par vérifier que la formule est bien exacte pour $n = 0$ et $n = 1$. En effet, $u_0 = -1 = 0 \times (-1) - 1$ et $u_1 = -1 = 1 \times (1-0) - 1$. Supposons alors que $u_n = n(n-1) - 1$ et que $u_{n+1} = n(n+1) - 1$ pour un certain entier naturel $n$. Montrons alors que

$$u_{n+2} = (n+1)(n+2) - 1 = n^2 + 3n + 1.$$

Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \\ &= (n+1)(n(n+1) - 1) - (n+2)(n(n-1) - 1) \\ &= (n+1)(n^2 + n - 1) - (n+2)(n^2 - n - 1) \\ &= n^3 + 2n^2 - 1 - n^3 - n^2 + 3n + 2 \\ &= n^2 + 3n + 1, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue et termine la récurrence.

⋆ **Partie 2.** On considère maintenant les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 6 \\ a_{n+2} & = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{a_n}{3^n} \quad .$$

(1) On écrit sans peine le script suivant:

```
a=1;
A=6;
disp(a)
disp(A/3) //on affiche les deux premiers termes de la suite (b_n)
for i=1:10 //i=10 correspond à a_11 (et donc b_11, douzième terme de la suite)
    x=6*A-9*a; //formule de récurrence
    a=A;
    A=x; //on a écrasé les deux derniers termes de (a_n)
    b=A/(3^(i+1)); //attention A représente a_{i+1} donc il faut prendre 3^(i+1)
    disp(b)  //on affiche b_{i+1}
end
```

(2) L'affichage des douze premiers termes de $(b_n)$ nous laisse conjecturer que $b_n = n + 1$.

(3) Comme $b_n = a_n/3^n$, à partir de la conjecture précédent, on émet l'hypothèse que

$$a_n = (n+1)3^n,$$

que l'on s'empresse de démontrer par récurrence (double). On voit tout de suite que l'hypothèse est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$: $a_0 = 1 = (0+1) \times 3^0$ et $a_1 = 6 = (1+1) \times 3^1$. Supposons donc que l'hypothèse est vraie aux rangs $n$ et $n+1$. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n+2$. Mais, par définition de la suite

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 6a_{n+1} - 9a_n \\ &= 6(n+2)3^{n+1} - 9(n+1)3^n \qquad \text{par HR} \\ &= 2(n+2)3^{n+2} - (n+1)3^{n+2} \\ &= (2n+4-n-1)3^{n+2} \\ &= (n+3)3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+2$. Ainsi, la récurrence est démontrée et la formule est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.