ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

À rendre le 8 Novembre

Afin de motiver un peu l'introduction de certains des concepts au programme et se conforter dans l'idée que tout cela est bien utile, on propose un sujet, dont l'énoncé (dont on ne prendra pas peur) est très détaillé et parait donc très long, qui traite d'un problème concret.

Emprunt à annuités constantes

Un bel et sombre inconnu veut emprunter à sa banque une certaine somme d'argent S, qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant N années, une certaine somme fixe a, appelée **annuité**.

La banque applique au capital S emprunté un taux d'intérêt annuel de $t\%$. On voit alors que l'annuité a remboursée l'année n est constituée à la fois de l'intérêt b_n (produit par le capital restant dû) et par l'amortissement a_n correspondant à la part de capital remboursée cette année là.

On peut se poser les questions suivantes:

(1) À partir d'un taux fixe (et fixé), d'un capital et d'une durée, comment calculer l'annuité?
(2) Connaissant le capital, la durée et l'annuité, peut-on retrouver le taux d'intérêts?

Ces questions ne sont pas si immédiates qu'elles le paraissent, notamment la deuxième qui nécessite d'introduire une méthode visant à trouver des solutions d'équation de degré élevé. Nous proposons ici, en plusieurs parties, une solution assez globale du problème, mêlant les outils introduits pour l'étude des suites et l'utilisation de `SciLab`.

Les Parties 1 et 2 sont indépendantes (et ne dépendant pas du contexte du problème). La troisième partie utilise les résultats de la Partie 1 et la dernière partie ceux des trois premières.

Partie 1 - Étude de trois suites croisées

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ trois suites numériques vérifiant les relations suivantes:

(R1) $$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1, \qquad a_n + b_n = a$$

(R2) $$\forall n \geq 1, \qquad d_n = d_{n-1} - a_n$$

(R3) $$\exists \tau > 0,\ \forall n \geq 1, \qquad b_n = \tau d_{n-1}$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$a_{n+1} = a_n + \tau\left(d_{n-1} - d_n\right).$$

(2) Montrer alors que (a_n) est géométrique de premier terme a_1 et préciser sa raison. En déduire l'expression de son terme général en fonction de a_1 et de n.

(3) On note

$$S = \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

À l'aide de la question précédente, exprimer S en fonction de a_1, de τ et de N. En déduire a_1 en fonction de S, de τ et de N.

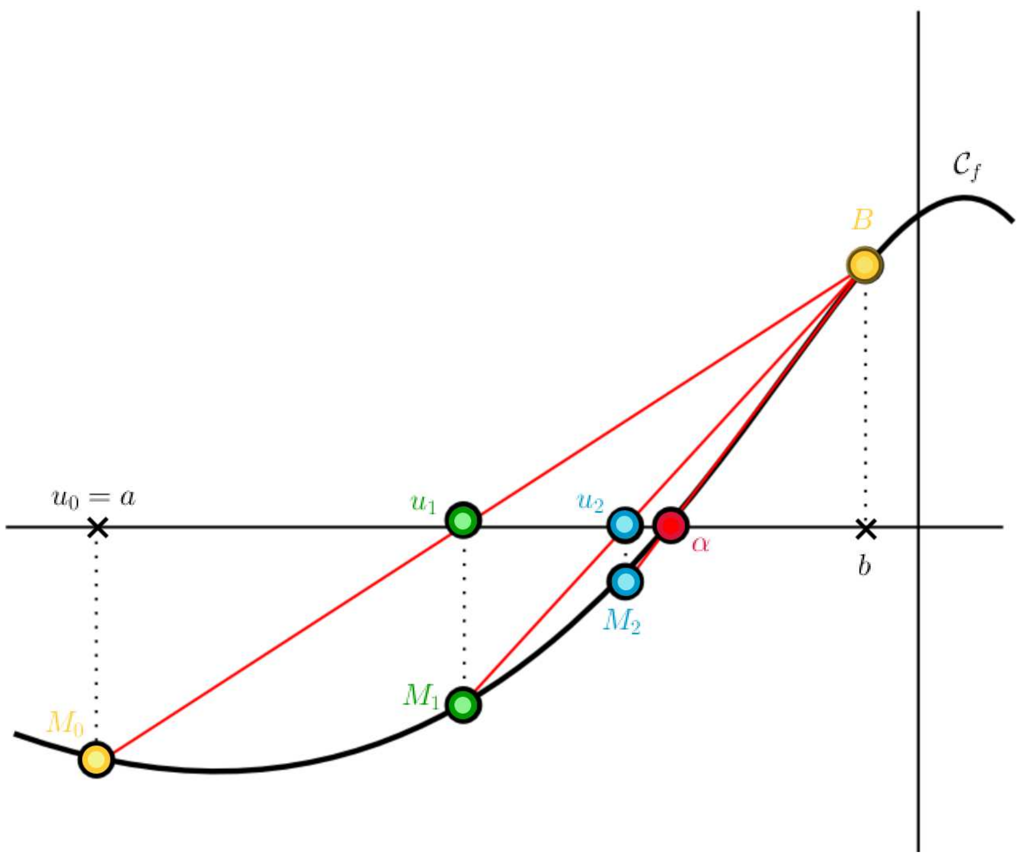
(4) En déduire l'expression de a en fonction de S, de τ, de d_0 et de N.

Partie 2 - Méthode de Lagrange[1]

On cherche à introduire une méthode itérative dont le but est de trouver une approximation des solutions d'équations du type

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction avec certaines propriétés de régularité (qu'on précisera ci-après) L'idée est, connaissant un intervalle $[a, b]$ sur lequel la fonction s'annule, de considérer la suite des points d'intersection de la courbe avec des cordes.



Si B a pour coordonnées $(b, f(b))$ et M est un point de coordonnées $(u, f(u))$ (avec $u \in [a; b[$), alors la droite (BM) coupe l'axe des abscisses en

$$v = \frac{bf(u) - uf(b)}{f(u) - f(b)}$$

(Ces calculs se vérifient facilement, on a donc décidé de ne pas alourdir le sujet en demandant de les retrouver.) On note α la solution de $f(x) = 0$ sur $[a; b]$. On introduit donc les fonctions

$$g: \; x \in [a; b[\longmapsto \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)}$$

[1]Cette méthode est aussi parfois appelée *Méthode de la fausse position*

et

$$h:\ x \in [a;b] \longmapsto f(b)^2 + (x-b)f'(x)f(b) - f(b)f(x).$$

On suppose ici que la fonction f a les propriétés suivantes:

(i) La fonction f est deux fois dérivable sur $[a;b]$;
(ii) $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$;
(iii) Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) > 0$ (c'est à dire que la fonction y est strictement croissante);
(iv) Pour tout $x \in [a;b]$, $f''(x) > 0$ (c'est à dire que la fonction y est *convexe*[2]).

(1) On **admet**[3] que la stricte croissante de f sur $[a,b]$, combinée à l'hypothèse (ii) assure l'existence d'un et d'un unique $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[a;b]$.

(2) Étudier les variations de h.
(3) Calculer $h(b)$. En déduire le signe de $h(x)$ puis la monotonie de g sur $[a;b[$.
(4) Déterminer ensuite le signe de $g(x) - x$ sur $[a;b[$.

(5) On introduit alors la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= g(u_n) \qquad (n \geq 0) \end{cases}$$

(a) Montrer, par récurrence, que u_n est bien défini pour tout n et que, de plus, $u_n \in [a;\alpha[$.
(b) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que (u_n) converge vers une limite ℓ. Dans quel intervalle se trouve nécessairement ℓ? Conclure quant à l'unique valeur possible pour ℓ.
(c) Montrer que (u_n) converge (on pourra étudier sa monotonie à l'aide du signe de $g(x) - x$). Conclure.

(6) On pourrait même montrer que la convergence est assez rapide[4]. Ainsi, on utilisera comme approximation de α le premier terme de la suite dont l'écart (en valeur absolue) à celui d'avant est inférieur à 10^{-9}.

Écrire un programme `SciLab` qui, pour une fonction f ayant les bonnes propriétés, renvoie une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a;b]$.

Partie 3 - Un plan de remboursement

On revient à notre bel et sombre inconnu qui veut emprunter un capital d'un montant S, qu'il s'engage à rembourser en N années, par annuités constantes égales à a, avec un intérêt annuel de $t\%$.

Après versement de l'annuité de la n-ième année, la **dette actualisée** d_n est diminuée du montant de l'amortissement.

(1) Avec les notations précédentes, que vaut d_0?
(2) Expliquer pourquoi les suites (a_n), (b_n) et (d_n) ainsi définies vérifient les conditions $(R1)$, $(R2)$ et $(R3)$. Préciser la valeur du paramètre τ de la relation $(R3)$ dans ce cas précis.
(3) Que doit alors payer chaque année le bel et sombre inconnu pour rembourser en 20 ans son emprunt de 120 000 euros à un taux de 1,90 %? (on arrondira le résultat au centime d'euro).
(4) Écrire un programme, sous `SciLab`, qui, à partir du taux d'intérêt, de la somme empruntée et du nombre d'années affiche la valeur de l'annuité correspondante.

[2]On a pas besoin, ici, d'en savoir plus sur la notion de convexité.
[3]Ce qui pourrait être démontré par le théorème de bijection, au programme du Chapitre 8
[4]Cela nécessite cependant des outils un peu plus sophistiqués

(5) Modifier le programme pour qu'il affiche également le total de tous les intérêts perçus par la banque.

Partie 4 - Une approximation du taux

Dans une autre banque, on propose au bel et sombre inconnu, après examen de l'offre de prêt de la concurrence, un prêt de la même somme, sur une durée de 15 ans, avec annuités constantes de 9255 euros.

Lorsque le bel et sombre inconnu demande au banquier quel est le taux d'intérêts correspondant à cette offre, ce dernier, évasif mais péremptoire, lui assure que son offre propose un taux plus bas.
L'objectif de cette section est de déterminer si le banquier ment ou non.

(1) Utiliser la formule obtenue à la Question 4 de la première partie pour montrer que le taux d'intérêt τ est solution de l'équation

$$\frac{120000}{9255}\tau\,(1+\tau)^{15} - (1+\tau)^{15} + 1 = 0.$$

Cette équation est difficile à résoudre. En fait, on va utiliser une méthode d'approximation de Lagrange introduite à la Partie 2. Le monde est bien fait.

On introduit alors la fonction (définie sur $\mathbb{R}$)

$$f : x \mapsto \frac{120000}{9255}x\,(1+x)^{15} - (1+x)^{15} + 1.$$

(2) Vérifier que la fonction f satisfait bien les quatre conditions (i) à (iv), sur l'intervalle $[0.015; 0.02]$, de la Partie 2. Afin d'alléger les calculs, on posera

$$f(x) = Qx(1+x)^{15} - (1+x)^{15} + 1 = (1+x)^{15}(Qx-1) + 1, \qquad \text{avec} \quad Q = \frac{120000}{9255}.$$

On donne en plus[5]

$$f(0.015) \simeq -0.0071, \quad f(0.02) \simeq 0.0031, \quad \frac{15-Q}{16Q} \simeq 0.0098 \quad \text{et} \quad \frac{14\times 15 - 30Q}{15\times 16\times Q} \simeq -0.0575.$$

(3) En utilisant le programme `SciLab` de la partie 2, répondre à la question posée.

[5] On a naturellement trouvé ces valeurs avec `SciLab`