ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5

À rendre le 22 Novembre

Exercice 1. On considère les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^3y^2z^6, x^4y^5z^{12}, x^2y^2z^5) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\ln(x), \ln(y), \ln(z)) \,. \end{array}$$

(1) Déterminer

$$g\left(\{1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*\right) \qquad \text{et} \qquad g^{-1}\left(\{0;1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+\right).$$

(2) g est-elle injective? Surjective? Bijective?

(3) Expliciter $(g\circ f)(x,y,z)$ puis déterminer, pour $a,b,c>0$, $(g\circ f)^{-1}\left(\{(a;b;c)\}\right)$. En déduire que $g\circ f$ est bijective puis que f est bijective.

Exercice 2. (La formule du crible) Soient E un ensemble fini et A_1, A_2, A_3 et A_4 des parties de E.

(1) Rappeler les formules permettant de calculer le cardinal de $A_1\cup A_2$ et $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(2) Montrer, à partir des formules précédentes, la formule du crible pour la réunion de quatre parties:

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right) = \sum_{k=1}^{4} \#A_k - \sum_{1\le k<j\le 4} \#\left(A_k\cap A_j\right) + \sum_{1\le k<j<l\le 4} \#\left(A_k\cap A_j\cap A_l\right) - \#\left(\bigcap_{k=1}^{4} A_k\right).$$

Exercice 3. (La meilleure façon de marcher)

Monsieur Fritzl emprunte un escalier à n marches pour aller à sa cave. Il descend cet escalier marche par marche ou en sautant une marche. On s'intéresse au nombre de façons différentes de descendre l'escalier à n marches, que l'on note a_n. Il est alors clair que $a_1 = 1$ (s'il n'y a qu'une seule marche, on ne peut descendre l'escalier que d'une seule façon).

(1) Déterminer a_2, a_3 et a_4.

(2) Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on justifiera la réponse par un argument de dénombrement).

(3) Montrer, à l'aide d'une récurrence double et de la formule du triangle de Pascal, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = a_n, \qquad \text{où, par convention, } \binom{m}{p} = 0 \text{ si } p > m.$$

(4) Montrer, en justifiant la réponse par un argument de dénombrement, que, si n et m sont deux entiers naturels, alors

$$a_{n+m} = a_n a_m + a_{n-1}a_{m-1}.$$

(5) Écrire un programme `SciLab` qui, en fonction du nombre de marches de l'escalier et, à raison d'une descente différente chaque jour, compte le nombre de semaines nécessaires pour essayer toutes les façons de descendre différentes.

(6) Exprimer a_n en fonction de n.