ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5

Solution

Exercice 1. On considère les deux applications

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x^3y^2z^6, x^4y^5z^{12}, x^2y^2z^5) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (\ln(x), \ln(y), \ln(z)) \, . \end{array}$$

(1) Par définition,

$$g\left(\{1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*\right) = \{g(1,y,z) : y>1, z>0\} \, .$$

Or, on connait bien le logarithme. $\ln(1)=0$, $\ln(y)>0$ si $y>1$ (plus précisément $\ln(]1;+\infty[) = \mathbb{R}_+^*$) et le log réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Donc,

$$g\left(\{1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*\right) = \{0\} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} g^{-1}\left(\{0;1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+\right) & = & \{(x,y,z) : \ln(x)=0 \text{ ou } \ln(x)=1, \ln(y)>1, \ln(y)\geq 0\} \\ & = & \{1;e\}\times]e:+\infty[\times[1;+\infty[. \end{array}$$

(2) Montrons que g est injective:

$$g(x_1,y_1,z_1)=g(x_2,y_2,z_2) \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x_1) & = & \ln(x_2) \\ \ln(y_1) & = & \ln(y_2) \\ \ln(z_1) & = & \ln(z_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_2 \\ y_1 & = & y_2 \\ z_1 & = & z_2 \end{array}\right.$$

et g est bien injective. Montrons qu'elle est également surjective. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Comme $x\mapsto\ln(x)$ est surjective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il existe nécessairement $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\ln(x)=a$, $\ln(y)=b$ et $\ln(z)=c$. Ainsi, $g(x,y,z)=(a,b,c)$ et on a bien la surjectivité de g à partir de celle du logarithme. L'application g étant surjective et injective, elle est donc bijective. (En fait, on aurait pu montrer la bijectivité de g directement à partir de celle du log).

(3) Les propriétés du logarithme permettent de calculer simplement $(g\circ f)(x,y,z)$. Plus précisément, si $x,y,z>0$, on a

$$(g\circ f)(x,y,z) = (3\ln(x)+2\ln(y)+6\ln(z), 4\ln(x)+5\ln(y)+12\ln(z), 2\ln(x)+2\ln(y)+5\ln(z)).$$

Afin de déterminer $(g\circ f)^{-1}(\{(a;b;c)\})$, il faut résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\ln(x)+2\ln(y)+6\ln(z) & = & a \\ 4\ln(x)+5\ln(y)+12\ln(z) & = & b \\ 2\ln(x)+2\ln(y)+5\ln(z) & = & c \end{array}\right. ,$$

qui est un système linéaire, de trois équations à trois inconnues, qui sont $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$ que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss:

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} 3X+2Y+6Z &=& a \\ 4X+5Y+12Z &=& b \\ 2X+2Y+5Z &=& c \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X+2Y+5Z &=& c \\ 4X+5Y+12Z &=& b \\ 3X+2Y+6Z &=& a \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X+2Y+5Z &=& c \\ Y+2Z &=& b-2c \\ -2Y-3Z &=& 2a-3c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X+Z &=& 5c-2b \\ Y+2Z &=& b-2c \\ Z &=& 2a+2b-7c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} X &=& -a-2b+6c \\ Y &=& -4a-3b+12c \\ Z &=& 2a+2b-7c \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x = e^X = \frac{e^{6c}}{e^{a+2b}}, \quad y = e^Y = \frac{e^{12c}}{e^{4a+3b}}, \quad \text{et} \quad z = e^Z = \frac{e^{2a+2b}}{e^{7c}}$$

et on conclut que

$$(g \circ f)^{-1}(\{(a,b,c)\}) = \left\{\left(\frac{e^{6c}}{e^{a+2b}}, \frac{e^{12c}}{e^{4a+3b}}, \frac{e^{2a+2b}}{e^{7c}}\right)\right\}.$$

On vient dont de voir, en particulier, que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent par $g \circ f$ dans l'ensemble de départ. Ainsi, $h = g \circ f$ est bijective. Or, on sait que g est également bijective et on peut donc voir que $f = g^{-1} \circ h$ est bien bijective comme composée de deux applications bijectives.

Exercice 2. (La formule du crible) Soient E un ensemble fini et A_1, A_2, A_3 et A_4 des parties de E.

(1) Les formules du crible du cours nous disent que

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$$

et

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_3 \cap A_1) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

(2) Réécrivons la formule à démontrer en écrivant explicitement tous les éléments qui la composent (attention, cela prend de la place!)

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 \\
&- (\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_4 \cap A_1)) \\
&+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_2 \cap A_3) \\
&- \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).
\end{aligned}$$

Notons alors $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. On cherche à calculer $\#(B \cup A_4)$. Mais, par la formule du crible pour la réunion de deux ensembles, on a

$$\begin{aligned}
\#(B \cup A_4) &= \#B + \#A_4 - \#(B \cap A_4) \\
&= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(B \cap A_4).
\end{aligned}$$

Or, par distributivité de l'intersection sur la réunion,

$$\begin{aligned}
B \cap A_4 &= (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 \\
&= (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)
\end{aligned}$$

et la formule du crible pour la réunion de trois ensembles permet de calculer $\#(B \cup A_4)$:

$$\begin{aligned}\#(B \cap A_4) &= \#(A_1 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4) \\ &- (\#((A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4)) + \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)) + \#((A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4))) \\ &+ \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4))\end{aligned}$$

ce qui se simplifie

$$\begin{aligned}\#(B \cap A_4) &= \#(A_1 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4) \\ &- (\#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4)) \\ &+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).\end{aligned}$$

Combinant tout ceci, on obtient exactement la formule voulue.

Exercice 3. (La meilleure façon de marcher)

(1) On va déterminer a_2, a_3 et a_4 en listant toutes les façons possibles de descendre l'escalier. On représente une façon de descendre par une suite de 1 et de 2 correspondant au nombre de marches descendues à chaque pas. On note A_n l'ensemble des descentes pour un escalier à n marches. Ainsi, $a_n = \#A_n$. On a alors

$$A_2 = \{11; 2\} \qquad \text{donc} \qquad a_2 = 2,$$

$$A_3 = \{111; 12; 21\} \qquad \text{donc} \qquad a_3 = 3,$$

$$A_4 = \{1111; 112; 121; 211; 22\} \qquad \text{et donc} \qquad a_4 = 5.$$

(2) Pour descendre un escalier à $n+2$ marches, il faut commencer par décider du premier pas. Le premier pas peut être un petit pas pour Monsieur Fritzl (mais un grand pas pour l'humanité), c'est à dire qu'il commence par descendre une seule marche. Auquel cas, il reste $n+1$ marches à descendre et, par définition, il y a a_{n+1} façons de le faire. Ou bien, le premier pas de Monsieur Fritzl peut être une enjambée de deux marches et, dans ce cas là, il reste n marches à descendre, et on sait qu'il y a a_n façons de le faire. Au final, en combinant les deux alternatives disjointes, on obtient bien

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

(3) L'initialisation de cette récurrence double se vérifie rapidement:

$$a_1 = 1 = \binom{1}{0}, \qquad a_2 = 2 = 1 + 1 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}.$$

Supposons maintenant (HR) que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$. Alors,

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \qquad \text{(D'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \qquad \text{(D'après HR)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n-(k-1)}{(k-1)+1} + 1 \qquad \left(\text{car } \binom{n+1}{0} = 1\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k+1} + 1 \qquad \text{(Par changement d'indice } k = k-1).\end{aligned}$$

On regroupe ensuite tout sous une seule somme:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-(k-1)}{k+1} \right) + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k+1} + 1 \qquad \text{(D'après la formule du triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} + 1 \qquad \text{(Par changement d'indice } k = k+1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} \qquad \text{(car } \binom{n+2}{0} = 1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} \qquad \text{(car } \binom{0}{n+2} = 0\text{),}
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+2$ et termine donc la démonstration par récurrence.

(4) Pour descendre un escalier composé de $n+m$ marches, ou bien on descend d'abord les n premières marches (et on a a_n façons de le faire) puis on descend ensuite les m marches restantes (de a_m façons différentes), ce qui donne $a_n a_m$ façons de descendre. Ou bien, on descend $n-1$ marches (de a_{n-1} façons différentes), puis on enjambe deux marches, et enfin on descend les $m-1$ marches restantes, de a_{m-1} façons différentes. Cette seconde alternatives se fait donc de $a_{n-1}a_{m-1}$ façons. Au final, on trouve bien que

$$a_{n+m} = a_n a_m + a_{n-1} a_{m-1}.$$

(5) On propose le programme `SciLab` suivant, dont la partie principale est très classique et a déjà été vue plusieurs fois.

```
n=input('n=?');
a=1;
b=2;
for i=3:n
    x=a+b;
    a=b;
    b=x;
end
//b est donc le nombre de jours necessaires
s=b/7; //il y a 7 jours dans une semaine
//on cherche le premier entier supérieur à s
disp(floor(s)+1, 'Le nombre de semaines nécessaires est ')
```

(6) La suite (a_n) est à récurrence linéaire d'ordre 2 et c'est d'ailleurs un exercice que l'on a déjà fait. En introduisant l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence, on trouve que

$$a_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

où λ et μ se déterminent à l'aide des deux premiers termes a_1 et a_2. On a donc, après résolution d'un système de deux équations à deux inconnues que l'on omet volontairement ici

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$