ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

À rendre le 29 Novembre

Exercice 1. Une étudiante sérieuse souhaite ranger ses livres de cours sur une étagère. Sa collection regroupe 3 livres de Mathématiques, 2 livres de Langue Vivante et 4 livres d'ESH. Combien y a-t-il de façon de ranger les 9 livres:

(1) En tout?
(2) De sorte que tous les livres soient classés par matière?
(3) De sorte que les livres de mathématiques ne soient pas regroupés alors que c'est le cas pour les deux autres matières?
(4) De sorte que seuls les livres de mathématiques soient regroupés?

Exercice 2. (Secret Santa)

Un enseignant sympathique organise, juste avant les fêtes, un *Secret Santa* pour sa classe. Les n participants mettent leur nom dans une urne et chacun tirera un petit papier et devra offrir un cadeau à la personne dont le nom est inscrit sur le petit papier. On appelle tirage l'attribution d'un papier à chaque participant.

(1) Combien y a-t-il de tirages différents?
(2) L'enseignant adore les cadeaux. Il décide de glisser non pas un seul, mais p papiers avec son nom. Ni vu ni connu.
   (a) Combien y a-t-il de tirages différents dans cette nouvelle disposition? (Chaque participant continue de ne tirer qu'un seul papier).
   (b) Dans combien de ces tirages l'enseignant se fait-il un cadeau à lui-même?
   (c) Quel est le nombre de tirages pour lesquels les p papiers de l'enseignant sont tirés?

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(1) Utiliser la formule du binôme pour montrer que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

On pose alors

$$v_{n,k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

(2) Montrer que, si $k \leq n$, alors $v_{n,k} \leq v_{n+1,k}$.
(3) En déduire quer la suite (u_n) est croissante.