Devoir Maison n°6

Solution

Exercice 1. La collection regroupe 3 livres de Mathématiques, 2 livres de Langue Vivante et 4 livres d'ESH.

(1) Il y a 9 livres en tout que l'on peut permuter donc $9! = 3662880$ façons de le faire.

(2) Pour les classer par matières, on remarque qu'il y a déjà $3! = 6$ manières de choisir l'ordre des matières. Puis, une fois l'ordre choisi, il y a $3! = 6$ façons de permuter les livres de maths entre eux, $4! = 24$ façons de permuter ceux d'ESH et $2! = 2$ façons de permuter les livres de LV. Au total, il y a $3! \times 3! \times 4! \times 2! = 1728$ façons de les ranger par matière.

(3) Pour dénombrer cette situation, on découpe la situation en fonction du nombre de livres de maths qui séparent les livres d'ESH et de LV:
- Aucun livre de maths entre les deux matières: Comme les 3 livres de maths ne peuvent pas se suivre, il peut donc y en avoir un au début de l'étagère (et deux à la fin) ou deux au début de l'étagère et un seul à la fin. Comme on peut avoir ESH puis LV ou LV puis ESH, cela donne 4 configurations possibles;
- Un seul livre de maths entre les deux matières: Il peut y avoir donc un livre de maths en début d'étagère et un en fin d'étagère, 2 au début et aucun à la fin, ou l'inverse. Il y a donc 6 configurations dans le cas;
- Deux livres de maths entre les deux matières: Le livre de maths restant peut alors être en début ou en fin d'étagère. Il y a donc 4 configurations possibles.

Ne se souciant pas des permutations des livres au sein des matières, il y a donc $4+6+4 = 14$ configurations possibles. Pour chaque configuration, on peut permuter les livres de maths entre eux ($3!$ possibilités), les livres d'ESH entre eux ($4!$ possibilités) et ceux de LV entre eux ($2!$ possibilités). Au final, il y a $14 \times 3! \times 4! \times 2! = 4032$ façons d'avoir les deux disciplines rangées par matières et les maths non regroupés.

(4) Cette dernière situation est assez difficile à dénombrer. Notons M (resp. L, resp. E) le nombre de rangements où les livres de maths (resp. de LV, resp. d'ESH) sont regroupés. On cherche $\# M \cap \overline{L} \cap \overline{E}$. On a, par la formule du crible, la relation suivante

$$\# M \cap \overline{L} \cap \overline{E} = \# M - \# M \cap L - \# M \cap E + \# M \cap E \cap L.$$

On connait déjà, par la Question (2) $\# M \cap E \cap L = 1728$. Il reste donc à déterminer les trois autres cardinaux. Pour ce faire, on s'inspire de la méthode utilisée à la question précédente.

- Si les 3 livres de maths se suivent, il peut y avoir $k \in \{0, 1, 2, .., 6\}$ livres qui les précèdent. Soit 7 configurations. Pour chacune de ces configurations, on peut permuter les 3 livres de maths entre eux et les 6 livres restants entre eux. Ainsi, $\#M = 7 \times 6! \times 3! = 30240$.
- Si les 3 livres de maths sont regroupés, et qu'il en est de même pour les 2 livres de LV, il peut y avoir $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ livres (d'ESH) entre eux et $j \in \{0, ..., 4-k\}$ livres d'ESH avant. Comme on peut avoir d'abord les livres de maths ou d'abord les livres de LV. Il y a $2 \times (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 30$ configurations et pour chaque configuration, on peut permuter les livres. On trouve donc que $\#M \cap L = 30 \times 3! \times 2 \times 4! = 8640$.
- Avec un argument similaire, on a $\#M \cap E = 12 \times 3! \times 2 \times 4! = 3456$.

Au final,

$$\#M \cap \overline{L} \cap \overline{E} = 30240 - 8640 - 3456 + 1728 = 19872.$$

Exercice 2. (Secret Santa)

Notons S_n l'ensemble des tirages et s_n son cardinal.

(1) Associer une personne à une autre, sans répétition, de sorte que tout le monde soit tiré correspond à définir une bijection sur un ensemble à n éléments. On sait qu'il y en a $n!$. Ainsi, $s_n = n!$.

(2) Commençons par remarquer que si il y a n participants, dont le sympathique enseignant, il y a $n-1$ élèves qui ne mettent qu'un seul papier et l'enseignant qui en met p, l'urne contient alors $n - 1 + p$ papiers.

(a) On va tirer n papiers d'une urne qui en contient $n-1+p$ en tenant compte de l'ordre. Il y a donc

$$A_{n-1+p}^{n} = \frac{(n-1+p)!}{(p-1)!}$$

tirages différents avec cette petite variante bon enfant.

(b) Commençons par faire choisir l'enseignant. Il peut tirer p papiers le forçant à se faire un cadeau à lui même. Il reste ensuite $n-1$ étudiants qui doivent piocher parmi $n + p - 2$ papiers, ce qui se fait de A_{n+p-2}^{n-1} façons. Au total, il y a

$$p \times A_{n+p-2}^{n-1} = p \times \frac{(n+p-2)!}{(p-1)!}$$

façons pour l'enseignant de ne pas avoir dépenser d'argent pour un de ses élèves!

(c) Il faut naturellement que $p \leq n$ (ne soyons pas trop gourmand!). On va commencer par attribuer les p papiers de l'enseignant à p participants parmi les n. Il y a A_n^p de le faire. Ensuite, il faut que les $n-p$ participants restant choisissent un papier parmi les $n - 1 + p - p = n - 1$ papiers restants, ce qui se fait de A_{n-1}^{n-p} façons. Au final, il y a

$$A_n^p \times A_{n-1}^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!}$$

tirages qui rendront cet enseignant satisfait. Espérons que les élèves ne remarquent rien!

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(1) D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \qquad \text{(car } 1^{n-k} = 1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n^k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{n\times n\times\cdots\times n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(2) Soit $k \leq n$. Il est clair que, pour tout $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$

$$1 - \frac{j}{n} \leq 1 - \frac{j}{n+1}$$

et donc, toutes ces quantités étant positives, pour $k \leq n$ (attention, pas pour $k = n+1$)

$$v_{n,k} \leq v_{n+1,k}.$$

(3) On en déduit que

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} v_{n+1,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_{n+1,k} + v_{n+1,n+1} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} v_{n+1,k} \qquad \text{(car } v_{n+1,n+1} \geq 0\text{)} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} v_{n,k} \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&\geq u_n,
\end{aligned}$$

et la suite (u_n) est donc croissante.