ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7

Pour le 13 Décembre

Exercice 1. Soient A, B deux évènements d'un espace probabilisé. Montrer que

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)).$$

Exercice 2. Dans un appartement, une cuisine ouvre sur un salon qui ouvre sur l'extérieur. À l'instant $n = 0$, une grosse mouche bien agaçante se trouve dans la cuisine. On ouvre grand la fenêtre dans le but de se débarrasser de cette créature nuisible. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, son trajet obéit aux règles suivantes:

- Lorsqu'elle se trouve dans la cuisine à l'instant n, elle y reste à l'instant $n+1$ avec probabilité $1/3$ ou passe dans le salon avec probabilité $2/3$;
- Lorsqu'elle se trouve dans le salon à l'instant n, elle y reste à l'instant $n+1$ avec probabilité $1/2$, elle retourne dans la cuisine avec probabilité $1/4$, ou bien sort à l'air libre avec probabilité $1/4$;
- Lorsqu'enfin elle se retrouve dehors, elle ne revient plus.

On introduit les évènements A_n "la mouche est dans la cuisine à l'instant n", B_n "la mouche est dans le salon à l'instant n" et S_n "la mouche sort à l'instant n". On note a_n, b_n et s_n les probabilités correspondantes.

(1) Déterminer $a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1$ et s_2.
(2) Sachant qu'à l'instant $n = 2$ la mouche est dans la cuisine, quelle est la probabilité qu'elle ait été dans le salon à l'instant $n = 1$?
(3) À l'aide d'une formule qu'on citera, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

(4) À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 2a_n$.
(5) En déduire l'expression des termes généraux de a_n et b_n. Montrer ensuite que, pour $n \geq 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire l'expression de s_n, pour $n \geq 2$.
(6) On note S l'évènement "la mouche finit par quitter l'appartement", D_n l'évènement "la mouche est dehors à l'instant n et d_n sa probabilité.
  (a) Justifier que $d_n = 1 - a_n - b_n$. En déduire la limite de (d_n).
  (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset Z$. En déduire que

$$d_n \leq P(Z) \leq 1.$$

  (c) En déduire que $P(Z) = 1$.

Exercice 3. Trouver tous les polynômes $P(X)$ de degré 2 avec

$$P(1) = 2, \quad P(-2) = 1, \quad \text{et} \quad P(2) = -3.$$