Devoir Maison n°7

Pour le 13 Décembre

Exercice 1. Par définition, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P(A \cap B) \leq P(B)$. Une une quantité est plus petite que deux autres quantités, elle est en particulier plus petite que le minimum de ces deux quantités. On a donc l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

Pour l'inégalité de gauche, commençons par écrire que, par la formule du crible,

$$P(A \cap B) = P(1) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Or cette quantité pourrait être négative, mais une probabilité étant toujours positive ou nulle, on a aussi $P(A \cap B) \geq 0$. On a donc bien également l'inégalité de gauche.

Exercice 2.

(1) D'après les données et les notations du texte, on a

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & 1 & \text{(la mouche commence dans la cuisine)} \\ b_0 & = & 0 & \\ s_0 & = & 0 & \\ & & & \\ a_1 & = & \dfrac{1}{3} & \text{(elle est restée dans la cuisine avec probabilité } 1/3\text{)} \\ b_1 & = & \dfrac{2}{3} & \\ s_1 & = & 0 & \text{(elle ne peut pas encore être sortie)} \\ & & & \\ s_2 & = & P(A_0 \cap B_1 \cap S_2) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{A_0 \cap B_1}(S_2) & \\ & = & 1 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} & \\ & = & \dfrac{1}{6}. & \end{array}$$

(2) On utilise la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{A_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{P_{B_1}(A_2)P(B_1)}{P_{B_1}(A_2)P(B_1) + P_{A_1}(A_2)P(A_1)} \\ &= \frac{(1/4)(2/3)}{(1/4)(2/3) + (1/3)(1/3)} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(3) On utilise la formule des probabilités totales en conditionnant par les positions de la mouche à l'instant n et en suivant les probabilités de mouvement de la mouches données par l'énoncé. Notons $D_n = \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$ l'évènement "la mouche est dehors à l'instant n.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n) \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

car $P_{D_n}(A_{n+1}) = 0$. De même, on trouve immédiatement l'autre formule

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

(4) On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $b_1 = 2/3 = 2a_1$. Ensuite, on a

$$2a_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n = b_{n+1}.$$

(5) En injectant cela dans la relation de récurrence portant sur a_{n+1}, on trouve

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4} \times 2a_n = \frac{5}{6}a_n,$$

et la suite (a_n) est géométrique de raison $5/6$. Son premier terme étant $a_1 = 1/3$, on a (pour $n \geq 1$)

$$a_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n, \qquad b_n = 2a_n = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

D'autre part, la mouche sort à l'instant n si elle était dans le salon à l'instant à l'instant $n-1$ avec probabilité $1/4$. On a donc, pour $n \geq 2$,

$$s_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

(6) (a) Comme on l'a vu ci-dessus, A_n, B_b, D_n forme un s.c.e donc

$$d_n = P(D_n) = 1 - a_n - b_n.$$

(b) Comme $|5/6| < 1$, il est clair que $(5/6)^n \to 0$, $n \to +\infty$. Ainsi, (a_n) et (b_n) ont pour limite 0. Mais, par l'égalité de la question précédente, on en conclut que (d_n) a pour limite 1.

(c) Si la mouche est dehors à l'instant n, c'est qu'elle est sortie à un moment. On a donc bien $D_n \subset Z$ ce qui donne immédiatement $d_n \leq P(Z) \leq 1$.

(d) Le théorème des gendarmes impose alors que $P(Z) = 1$.

Exercice 3. Soit $P(X)$ un polynôme de degré 2. On peut donc l'écrire $P(X) = aX^2 + bX + c$. Ainsi,

$$P(1) = 2, \quad P(-2) = 1, \quad \text{et} \quad P(2) = -3 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a + b + c & = & 2 \\ 4a - 2b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -4/3 \\ b & = & -1 \\ c & = & 13/3 \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$P(X) = -\frac{1}{3}(4X^2 + 3X - 13).$$