ECE - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

❄ ❄ Devoir Maison n°8 ❄ ❄

❄ Solution ❄

❄ **Partie 1.** Où l'on effectue la division d'un polynôme

(1) Il est nécessaire de commencer par factoriser $P(X) = X^2 - 5X + 4$, ce qui se fait sans mal, via calcul du discriminant. On trouve donc $P(X) = (X-4)(X-1)$. Ainsi, 1 et 4 sont les deux racines (simples) de $P(X)$. Comme le degré de P est 2, le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ sera de degré inférieur ou égal à 1. On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = aX + B$ et

$$(\star) \qquad X^n = P(X)Q(X) + R(X)$$

pour un certain polynôme $Q(X)$. Afin de trouver deux équations sur a et b on injecte dans $(\star)$ les deux racines de P. On obtient le système de deux équations à deux inconnues que l'on résout

$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ 4a+b &= 4^n \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= 1 \\ -3b &= 4^n - 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a &= (4^n-1)/3 \\ b &= (4-4^n)/3 \end{cases}$$

Au final,

$$X^n = (X^2 - 5X + 4)Q(X) + \frac{1}{3}\left((4^n-1)X + (4-4^n)\right).$$

❄ **Partie 2.** Où l'on calcule la puissance $n-$ième d'une matrice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Par définition du polynôme d'une matrice carrée, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - 5A + 4I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

(2) D'après la question précédente

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q(A) + R(A) \\ &= R(A) \qquad (\text{car } P(A) = 0) \\ &= \frac{1}{3}\left((4^n - 1)A + (4 - 4^n)I_2\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 2(4^n - 1) & 2 \times 4^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) D'après les règles de calcul matriciel et la question précédente, si $M = \frac{1}{10}A$, on a

$$M^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{4^n + 2}{10^n} & \dfrac{4^n - 1}{10^n} \\ 2\dfrac{4^n - 1}{10^n} & \dfrac{2 \times 4^n + 1}{10^n} \end{pmatrix}$$

❄ **Partie 3.** Où l'on fait des cadeaux

- Si une certaine année il offre des chaussettes, alors il offrira l'année suivante des chaussettes, du thé ou du vin avec probabilités respectives 0.4, 0.3, 0.3;
- Si c'est du thé qu'il offre, l'année suivante, il offrira chaussettes, thé ou vin, avec probabilités 0.3, 0.4, 0.3;
- Enfin, si il offre du vin, l'année suivante ce sera toujours des chaussettes, du thé ou du vin, mais avec probabilités 0.2, 0.1, 0.7.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives d'offrir chaussettes, thé ou vin à Noël la $n-$ième année.

(1) Comme chaque année on offre toujours l'un des trois cadeaux et un seul des trois, a_n, b_n et c_n sont les probabilités d'un système complet d'évènements $\{A_n, B_n, C_n\}$. Par conséquent, $a_n + b_n + c_n = 1$.

(2) D'après la formule des probabilités totales et les données du texte

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= 0.4a_n + 0.3b_n + 0.2c_n. \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$b_{n+1} = 0.3a_n + 0.4b_n + 0.1c_n, \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = 0.3a_n + 0.3b_n + 0.7c_n.$$

(3) Comme $c_n = 1 - a_n - b_n$, on obtient

$$a_{n+1} = 0.4a_n + 0.3b_n + 0.2(1 - a_n - b_n) = 0.2a_n 0.1b_n + 0.2$$

et

$$b_{n+1} = 0.2a_n + 0.3b_n + 0.1.$$

(4) Les règles du calcul matriciel permettent en effet de voir que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = MX_n + B.$$

(5) Soit $L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $ML + B = L$. Il suffit de résoudre:

$$\begin{aligned}
ML + B = L &\iff \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} 0.2x + 0.1y + 0.2 = x \\ 0.2x + 0.3y + 0.1 = y \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} 0.2x + 0.1y + 0.2 = x \\ 0.2x + 0.3y + 0.1 = y \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5/18 \\ y & = & 2/9 \end{array} \right. \\
&\iff L = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(6) Pour $n = 1$, l'égalité est triviale: comme $M^{1-1} = I_2$, on a clairement $X_1 = X_1 - L + L$. Supposons que, pour un certain $n \geq 1$, $X_n = M^{n-1}(X_1 - L) + L$. Alors,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= MX_n + B \qquad \text{(D'après 4.)} \\
&= M \cdot M^{n-1}(X_1 - L) + ML + B \qquad \text{(Par HR)} \\
&= M^n(X_1 - L) + L \qquad (\text{car } ML + B = L),
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n + 1$. Ainsi, la récurrence est terminée.

(7) Combinant les résultats des différentes parties, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= M^{n-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{54} \begin{pmatrix} \dfrac{4^{n-1} + 2}{10^{n-1}} & \dfrac{4^{n-1} - 1}{10^{n-1}} \\ 2\dfrac{4^{n-1} - 1}{10^{n-1}} & \dfrac{2 \times 4^{n-1} + 1}{10^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc

$$a_n = \frac{1}{54} \left(13\frac{4^{n-1} + 2}{10^{n-1}} - 4\frac{4^{n-1} - 1}{10^{n-1}} \right) + \frac{5}{18},$$

$$b_n = \frac{1}{54} \left(26\frac{4^{n-1} - 1}{10^{n-1}} - 4\frac{2 \times 4^{n-1} + 1}{10^{n-1}} \right) + \frac{4}{18}.$$

(8) On voit alors que $a_n \longrightarrow 5/18$, $b_n \longrightarrow 4/18$ et donc que $c_n \longrightarrow 1/2$.