ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°1

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$,

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0.$$

Exercice 2. (Sommes de peu de fois)

(1) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

(2) Quelle valeur numérique va afficher `SciLab` à l'exécution du script suivant?

```
s=7/27;
for i=1:8
    s=s+7/(3^(2*i+3));
end
disp(s)
```

(3) Après avoir vérifié que

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right),$$

calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

(4) Après avoir permuté l'ordre de sommation (avec vigilance), calculer

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}.$$

(5) Calculer

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} \min(i,j), \qquad \text{où} \qquad \min(i,j) = \begin{cases} i, & \text{si } i \leq j \\ j, & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 3. On pose $u_0 = -2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

(1) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et que $u_n < 0$.
(2) Montrer que le terme v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de son terme général.
(4) Déterminer ensuite u_n en fonction de n.

Exercice 4. (extraits de **EML 2011**)

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

(1) Justifier que f est bien définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

(2) Établir que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$

(3) En déduire

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

(4) En déduire alors le sens de variation de f.

(5) Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et celle en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

(6) Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.

(7) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

(8) On considère la suite réelle (u_n) définie pour $n \geq 0$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

(i) Montrer que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$, alors il en est de même pour u_{n+1}. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, u_n existe bien et que $u_n \geq 2$.

(ii) Établir, par récurrence (et à l'aide de la question précédente) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n.$$

(iii) En déduire que (u_n) n'est pas majorée.

(iv) Écrire, en langage `SciLab`, une fonction `y=f(x)` permettant de calculer $f(x)$. Utiliser cette fonction pour écrire un programme qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

(1) Déterminer u_1 et u_2.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. On pose alors $v_n = \ln(u_n)$.

(3) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a l'encadrement

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

(4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$