ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°1

Solution

Exercice 1. On résout

$$\begin{aligned} 3^{2x}-3^{x+1}+2=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} X &=& 3^x \\ X^2-3X+2 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} X=3^x=e^{x\ln(3)} \\ X=1 \text{ ou } X=2 \end{array}\right. \\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{\ln(2)}{\ln(3)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}=\left\{0;\frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}.$$

Exercice 2. (Sommes de peu de fois)

(1) On commence par vérifier que l'égalité a lieu pour $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k=(-1)=\frac{(-1)^1(2\times 1+1)-1}{4}$$

donc l'initialisation de la récurrence ne pose pas de problème. Concernant le caractère héréditaire de la formule, supposons donc qu'elle soit vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k+(-1)^{n+1}(n+1) \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}+(-1)^{n+1}(n+1) \qquad \text{par HR} \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1-4n-4)-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^n(-2n-3)-1}{4}=\frac{(-1)^n\times(-1)(2(n+1)+1)-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et permet donc de terminer la preuve par récurrence.

(2) Les instructions `SciLab` données permettent de calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{7}{3^{2k+3}}.$$

On peut facilement calculer cette somme et ainsi prévoir ce que va renvoyer le logiciel. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{8} \frac{7}{3^{2k+3}} &= \frac{7}{3^3} \sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{3^2}\right)^k \\ &= \frac{7}{3^3} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^9}{1-\frac{1}{9}}\right) \\ &= \frac{7}{3 \times 8} \left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^9\right).\end{aligned}$$

On attendait pas ici de réponse plus précise. Sans outil de calcul, il est difficile de réellement répondre. Cela dit, on peut faire la remarque suivante. Étant assez clair que

$$1-\left(\frac{1}{9}\right)^9 \simeq 1,$$

le résultat du calcul précédent est en fait très proche de $7/24 = 8/24 - 1/24 = 1/3 - 1/24 \simeq 0.333 - 0.04$. On pouvait donc anticiper une réponse de `SciLab` très proche de `-->0.29`.

(3) Une mise au même dénominateur permet de vérifier l'égalité annoncée. Notant A_k la quantitée considérée,

$$\begin{aligned}A_k &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3) - 3k(k+2)(k+3) + 3k(k+1)(k+3) - k(k+1)(k+2)}{6k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k^3+6k^2+11k+6-3k^3-15k^2-18k+3k^3+12k^2+9k-k^3-3k^2-2k}{6k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.\end{aligned}$$

L'idée est ensuite de remplacer le quotient dans la somme par A_k et de regrouper les termes de sorte à faire apparaître des sommes télescopiques.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} A_k &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n+1} + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3) - 3(n+2)(n+3) + 6(n+1)(n+3) - 3(n+1)(n+2)}{3(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \\ &= \frac{n^3+6n^2+11n}{18(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

(4) Il s'agit de calculer cette somme double en deux étapes: on fixe d'abord un premier indice, ce qui nous permet de calculer une première somme (dont le résultat dépendra de l'indice fixé), puis on fait la somme du résultat intermédiaire trouvé en faisant varier cette fois le premier indice. C'est ce qu'on a fait dans les exercices jusqu'à maintenant. Ici, si on

décide de fixer i et de calculer la somme sur j des $\frac{i}{j+1}$, on est face à une expression qu'on ne sait *a priori* pas calculer. On va donc permuter l'ordre de sommation, en espérant une simplification à l'étape intermédiaire.

Pour cela, il faut fixer j et sommer sur i. Seulement, il faut être vigilant, dans la définition de la somme, le second indice j varie en fonction des valeurs de i. Il faut alors décrire l'ensemble des couples de valeurs entières parcourues pour (i, j) autrement:

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq j \end{cases}$$

Il suit donc que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1} &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} i \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\times\frac{j(j+1)}{2} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{j}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

(5) Afin de calculer cette deuxième somme double, il apparaît important de rappeler la valeur de $\min(i, j)$:

$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases}.$$

On va donc fixer un des deux indices (disons i) et découper la somme sur j en deux, en fonction de la valeur du min:

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq i,j\leq n}\min(i,j) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-(i+1)+1)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{i^2}{2} + \frac{2n+1}{2}i\right) \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{2n+1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 3. On pose $u_0 = -2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

(1) Par définition, $u_0 = -2 > 0$ donc l'initialisation de la récurrence est immédiate. Supposons alors que, pour une certaine valeur de $n \in \mathbb{N}$, u_n soit bien défini et qu'il soit strictement négatif. Alors, en particulier, $u_n \neq 3/2$ et on peut calculer $u_{n+1} = u_n/(3-2u_n)$. Ainsi, le terme d'indice $n+1$ est encore bien défini. Comme $u_n < 0$, il suit que $3 - 2u_n > 0$ mais alors le quotient définissant u_{n+1} est donc strictement négatif, ce qui termine la récurrence.

(2) On a vu à la question précédente que, pour tout entier n, $u_n < 0$. En particulier, $u_n \neq 1$ et on peut bien définir v_n pour tout entier n.

(3) On cherche donc à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n}-1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{3-2u_n}{u_n-3+2u_n} \\ &= \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0/(u_0-1) = 2/3$ et de raison $1/3$. On en déduit immédiatement l'expression de son terme général

$$v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

(4) On revient alors à l'expression de u_n en fonction de v_n:

$$v_n = \frac{u_n}{u_n-1} \iff u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{2/3^{n+1}}{2/3^{n+1}-1} = \frac{2}{2-3^{n+1}}.$$

Exercice 4. (extraits de **EML 2011**) On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}$$

(1) La fonction logarithme, seule vraie contrainte ici, est bien (définie et) dérivable sur $]0;+\infty[$; il suit clairement que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur ce même intervalle et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x))\, e^{x-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1}. \end{aligned}$$

(2) Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$. On va montrer, en faisant l'étude de la fonction g, que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. La fonction g est clairement définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et on calcule facilement

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

dont l'étude très facile du signe permet de dresser le tableau suivant:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on constate que $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$, ce qui est bien l'inégalité recherchée.

(3) La question précédente permet donc de voir que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$ et de conclure que, pour tout $x \in]0,+\infty[\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

(4) On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. On en déduit immédiatement que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(5) Déterminer les limites au bord de l'ensemble de définition de f n'est pas un problème; il n'y a pas de forme indéterminée et on peut tout simplement appliquer l'algèbre des limites:

En 0 : $f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1} \to -\infty$
En $+\infty$: $f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1} \to +\infty$

De plus, un calcul direct nous donne $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$. Il suit notamment que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 aura pour équation $T_1 : y = 3x - 2$.

On dresse alors, comme demandé, le tableau de variations de f:

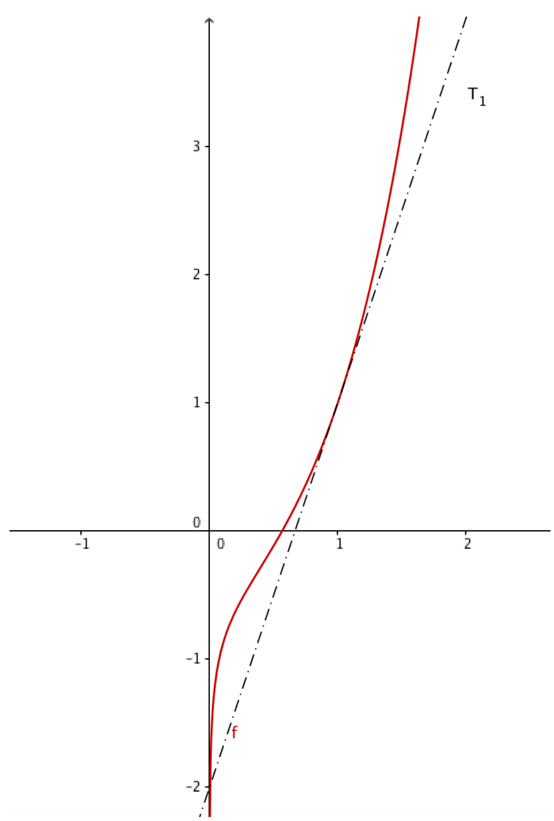
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(6) Il y a deux limites infinies au bord de l'ensemble de définition donc deux branches à étudier.
En 0 : $f(x) \to -\infty$ et on a donc une asymptote verticale (l'axe (Oy)).
En $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x + \ln x)\, e^{x-1}}{x} = \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) e^{x-1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car on sait, par croissance comparée, que $\ln(x)/x \to 0,\ x \to +\infty$. On a donc une branche parabolique "verticale" (c'est à dire de direction (Oy)) en $+\infty$.

(7) L'étude précédente nous permet de tracer l'allure de la courbe (ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.



On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ On va recycler les propriétés de f pour étudier cette suite.

Il faut notamment commencer par vérifier que la suite est bien **définie**. En effet, la fonction f prend des valeurs négatives mais n'est définie que pour des arguments positifs, ainsi si un terme de la suite devenait négatif, on ne pôurrait pas calculer le terme suivant. On va donc vérifier que ce n'est pas le cas.

(8) Supposons donc qu'il existe un certain entier $n \geq 0$ pour lequel u_n existe et a le bon goût d'être supérieur ou égal à 2. On peut alors calculer $f(u_n)$ car $u_n \geq 2 > 0$ est donc bien dans l'ensemble de définition de f. En particulier, u_{n+1} existe.

En reprenant l'étude de la fonction f, on se souvient que f est strictement croissante, et on observe en plus que

$$f(2) = (2 + \ln(2))e^1 > 2,$$

car $e \simeq 2,71 > 1$ et $\ln(2) > 0$.

Par croissance de f, on en conclut que

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(2) > 2,$$

et la majoration s'étend donc à u_{n+1}. Comme $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que la suite (u_n) est bien définie (chaque terme existe) et que, pour tout $n \geq 0$, on a bien $u_n \geq 2$.

(9) On procède encore par récurrence pour montrer l'inégalité. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$ et l'initialisation est bien vérifiée.

Soit alors $n \geq 0$ tel que $u_n \geq e^n$. On veut montrer que $u_{n+1} \geq e^{n+1}$.

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e^n).$$

On va alors utiliser la question précédente. Comme $u_n \geq 2$ et que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante, on sait en particulier que $\ln(u_n) \geq \ln(2) > 0$. Avec la même idée, on a $e^{u_n - 1} \geq e^{2_1} = e$. En combinant ces deux observations, on arrive à

$$u_{n+1} = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1} \geq u_n \times e \geq e^n \times e \geq e^{n+1},$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue grâce à l'hypothèse de récurrence. Au final, on a bien l'inégalité au rang $n+1$, ce qui prouve le caractère héréditaire de la propriété et termine la démonstration par récurrence.

(10) Si la suite (u_n) était majorée, on aurait l'existence d'une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq M$. On combinant ceci avec l'inégalité précédente, on obtient:

$$\forall n \geq 0, \qquad e^n \leq u_n \leq M.$$

Or, on sait bien que l'exponentielle tend vers $+\infty$ quand son argument fait de même et ne peux donc en aucun cas être majorée. Ainsi, il en est de même pour (u_n).

(11) Afin de déterminer le plus petit n tel que $u_n \geq 10^{20}$, on va utiliser une boucle `while`. En effet, tant que $u_n < 10^{20}$, on va augmenter le rang jusqu'à atteindre celui qui nous intéresse et enfin l'afficher. Une solution du programme serait alors la suivante:

```
n=0;
u=2;
while u<10^(20)
    n=n+1;
    u=(u+log(u))*exp(u-1);
end
disp(n)
```

On remarquera, en faisant tourner le programme, que `SciLab` renvoie $n = 3$. Au vu de l'étude de f et de la vitesse à laquelle la fonction tend vers l'infini, cela n'a rien de surprenant.

Exercice 5. On considère la suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

(1) Par définition de la suite

$$u_1 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{2}{2^2}\right) = \frac{15}{8}.$$

(2) Soit $n \geq 1$. Pour chaque k entre 1 et n, le terme $1 + k/n^2$ est strictement positif. Le produit de termes strictement positifs étant encore strictement positif, on en déduit immédiatement que $u_n > 0$. Il suit que le logarithme de u_n est une quantité bien définie, qu'on a choisi de noter v_n.

(3) Cet encadrement est très classique. L'inégalité de droite a déjà été prouvée dans le cours (Chapitre 1, Exercice 20, traité en classe et revu environ trois cent fois depuis). On montre donc ici seulement celle de gauche, par une étude de fonction. Plus précisément, posons

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x).$$

On cherche à montrer que, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leq 0$. Cette fonction est définie et dérivable (comme combinaisons de fonctions usuelles qui le sont aussi) sur $]0; +\infty[$. La dérivée s'exprime comme

$$\varphi'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0, \quad \forall x > 0.$$

On dresse alors facilement le tableau de variations sur $]0; +\infty[$, la limite en $+\infty$ s'obtenant par croissance comparée:

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	$-\infty$

En particulier, on a bien, $\varphi(x) \leq 0$, pour tout $x > 0$.

(4) Soit $n \geq 1$. On a, grâce aux propriétés du logarithme

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après, la question précédente, pour tout entier k entre 1 et n

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

Il suffit alors de passer à la somme dans l'encadrement précédent, le terme central donnant v_n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}.$$

En combinant tout cela, on trouve bien l'encadrement demandé:

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$