Devoir Surveillé n°2

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

$\star$ **Partie 1.** Étude de f.

(1) (a) Préciser l'ensemble de définition de f.
 (b) Étudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
 (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Former le tableau de variations de f.
(2) (a) Déterminer le signe de $1 - \sqrt{x^2+1}$ suivant la valeur de x.
 (b) En déduire le signe $f(x) - x$ (qu'on synthétisera sous forme d'un tableau) et que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont -1 et 0.
(3) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.
(4) Écrire l'ensemble des instructions qui permettraient d'obtenir ce même graphique, sur l'intervalle $[-10; 10]$, sous `SciLab`.

$\star$ **Partie 2.** Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Que dire de (u_n) si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?
(2) On suppose ici $u_0 < -1$.
 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.
 (b) En déduire que (u_n) est croissante.
 (c) Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on déterminera.
(3) On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
 (a) Montrer que $-1 < u_1$, que $u_1 < u_0$, puis que (u_n) est décroissante et minorée par -1.
 (b) En déduire qu'elle converge vers -1.
(4) On suppose ici $u_0 > 0$. Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de (u_n) dans ce cas?
(5) Écrire, sous `SciLab` une suite d'instruction qui, en fonction d'un premier terme u_0 et d'un rang n entrés par l'utilisateur, affiche le terme u_n correspondant.

Exercice 2.

(1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y,z) = (2x+y, x-3y)$. Montrer que f est surjective. Est-elle injective?

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $g(x,y) = (x-y, x+y)$. Montrer que g est bijective et expliciter g^{-1}.

(3) Soit h l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $h(x,y,z) = g \circ f(x,y,z)$. Expliciter $h(x,y,z)$ Est-il possible que h soit bijective?

(4) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, définie par

$$\varphi(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ 2x+y-z+t,\ x-y+2z-t,\ 3x+y+z).$$

Déterminer les antécédents éventuels, par φ, de $(1,4,-2,0)$.

Exercice 3. (Faux Billets)

On suppose que p est un réel fixé de $]0;1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.

On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .

On note F : " Le billet testé est faux " et B : " La lumière qui s'allume est bleue ".

On note $P(\bar{F}|B) = \alpha$ et $P(F|\bar{B}) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

(1) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que

$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$

En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.

(2) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est

$$P_F(B) = \frac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

(3) On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note

$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$

Montrer que

$$1 - P_F(B) = \frac{0,95x}{0,9(x + 0,05)}.$$

Exercice 4. Une pièce A donne $FACE$ avec la probabilité $2/5$, une pièce B avec la probabilité $7/10$. On lance une des deux pièces au hasard: si on obtient $FACE$, on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers.

(1) On cherche à obtenir p_n la probabilité de l'évènement F_n: "On obtient $FACE$ au $n-$ième lancer". Pour cela, on introduit a_n la probabilité de l'évènement A_n: "on lance la pièce A au $n-$ième coup".
  (a) Que valent $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$? (On justifiera soigneusement la réponse.)
  (b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
  (c) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

(2) On introduit, pour $k \in [\![1;n]\!]$, l'évènement B_k: "on obtient $PILE$ au $k-$ième lancer uniquement et $FACE$ à tous les autres".
  (a) Déterminer $P(B_1)$ et $P(B_n)$.
  (b) Déterminer ensuite $P(B_k)$ pour $k \in [\![2;n-1]\!]$.
  (c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une seule fois $PILE$ au cours des n lancers?