ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°2

Solution

Exercice 1. (D'après **EML 1993**) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

$\star$ Partie 1. Étude de f.

(1) (a) Pour tout x réel, $x^2+1>0$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction racine est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout x réel, $x^2+1>0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{x^2+1-x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

qui est du signe de $-x+1$. Donc f est croissante sur $]-\infty,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.

(c) Concernant les limites:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{\sqrt{x^2}\sqrt{(1+1/x^2)}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{|x|\sqrt{(1+1/x^2)}} - 1$$

donc en $+\infty$, f tend vers 0 et en $-\infty$, f tend vers -2. On en déduit le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

(2) (a) Multiplions par la quantité conjuguée

$$1-\sqrt{x^2+1} = \frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}.$$

Le signe de cette quantité est le même que celui de $-x^2$: c'est partout négatif et cela s'annule en 0.

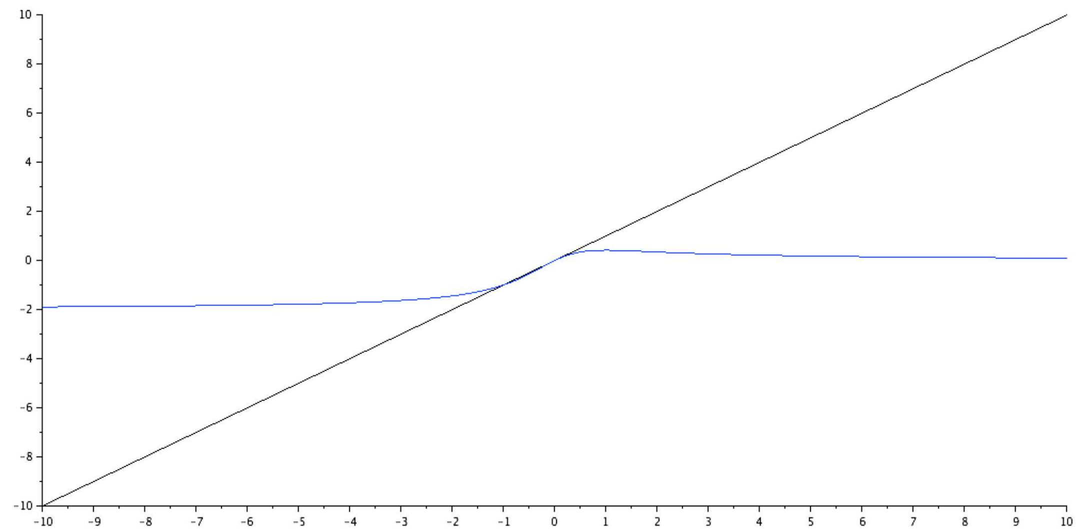
(b) Il suffit ici de factoriser et d'utiliser la question précédente:

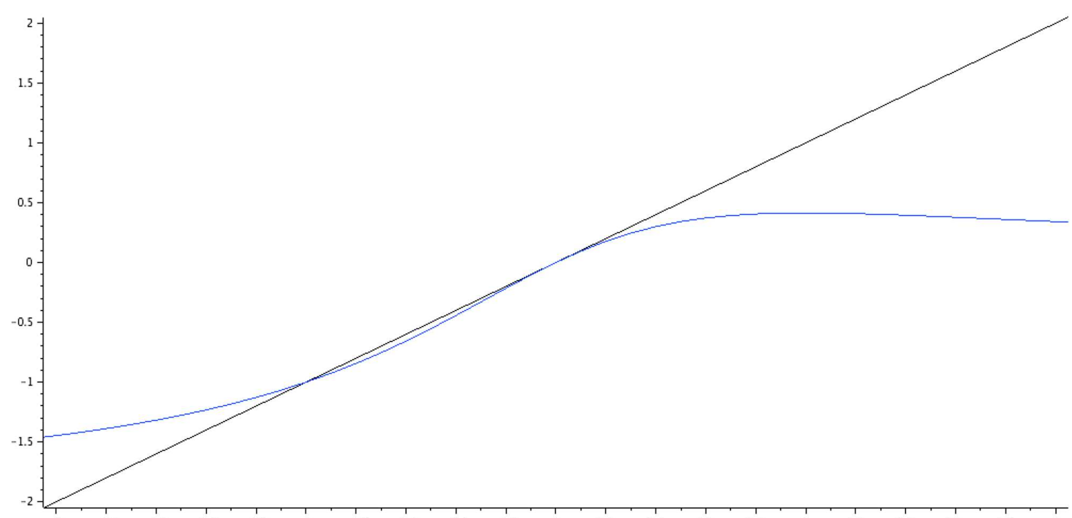
$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (1+x) = (x+1)\,\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}},$$

ce qui permet d'en déduire facilement le signe et les points fixes (solutions de $f(x)-x = 0$):

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

(3) Voici la figure tracée par `SciLab` sur $[-10; 10]$ (on propose également un zoom sur $[-2; 2]$)





(4) Et les commandes permettant le tracé:

```
function y=f(x)
    y=(x+1)/sqrt(x^2+1)-1;
endfunction

X=-10:0.1:10 //on choisit un pas de 0.1 pour la subdivision de l'intervalle
Y=feval(X,f);
plot2d(X, [X',Y'])
```

⋆ **Partie 2.** Étude d'une suite récurrente.

(1) Si $u_0 = -1$ on a alors pour tout entier n, $u_n = -1$ et si $u_0 = 0$ alors pour tout entier n, $u_n = 0$. Choisir comme premier terme de la suite un point fixe de la fonction génère une suite constante.

(2) On suppose ici $u_0 < -1$.

(a) On procède par récurrence. Pour $n = 0$ on a bien $u_0 < -1$.
Soit n entier tel que $u_n < -1$ alors u_n et -1 appartiennent à $]-\infty, 1]$ et f y est croissante strictement donc $f(u_n) < f(-1)$ et $u_{n+1} < -1$, ce qui termine la récurrence.

(b) On utilise le signe de $f(x) - x$ sur $]-\infty; -1[$ où se trouvent bien, d'après la question précédente, tous les termes de la suite. Plus précisément, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ et la suite est bien croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par -1. Elle est donc convergente par application du théorème de convergence monotone. Soit ℓ sa limite. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en ℓ. Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant u_{n+1}, on obtient que $\ell = f(\ell)$ qui ne peut être vrai que si $\ell = 0$ ou $\ell = -1$. Mais, tous les termes de la suite étant inférieurs à -1, on a que $\ell \leq -1$ et par conséquent $\ell = -1$.

(3) On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.

(a) Comme f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et que -1 et u_0 en sont éléments, $f(-1) < f(u_0)$ et donc $-1 < u_1$.
Comme $f(x) < x$ sur $]-1, +\infty[$ et que $u_0 > -1$, on a $u_1 = f(u_0) < u_0$. Donc pour $n = 0$, on a $-1 < u_1 < u_0 < 0$. Soit n tel que $-1 < u_{n+1} < u_n < 0$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et que -1, u_{n+1}, u_n et 0 en sont éléments, $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(0)$ et $1 < u_{n+2} < u_{n+1} < 0$ puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par -1.

(b) Elle est donc convergente (toujours par convergence monotone). Soit ℓ sa limite. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ. Donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ et $\ell = -1$ ou $\ell = 0$.
Mais comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par u_0. Et par passage à la limite on a: $\ell \leq u_0 < 0$ Donc $\ell \neq 0$ et $\ell = -1$.

(4) On suppose ici $u_0 > 0$. On a alors $f(u_0) = u_1 < f(1) < 1$ donc on se retrouve dans la situtation précédente à partir du premier terme de cette suite.

(5) Les instructions suivantes permettent d'afficher ce qu'on demande (en considérant que la fonction f est déjà programmée comme précédemment):

```
u=input('u0=? ');
n=input('n=? ');

for k=1:n
    u=f(u);
end

disp(u)
```

Exercice 2.

(1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y,z) = (2x+y, x-3y)$. Pour montrer que f est surjective, il faut montrer que tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ admet (au moins) un antécédent par f dans $\mathbb{R}^3$. Il faut donc résoudre le système

$$f(x,y,z) = (a,b) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & a \\ x-3y & = & b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & (3a+b)/7 \\ y & = & (a-2b)/7 \end{array}\right.$$

On a des solutions, ainsi f est surjective. En revanche, elle n'est clairement pas injective. On voit que son expression ne dépend pas de z et par exemple

$$f(1,2,1) = (4,-5) = f(1,2,17).$$

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $g(x,y) = (x-y, x+y)$. Pour montrer que g est bijective, on montre que tout élément $(a,b) \in /R^2$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par g.

$$g(x,y) = (a,b) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & a \\ x+y & = & b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & (a+b)/2 \\ y & = & (b-a)/2 \end{array}\right.$$

Il y a bien une unique solution, donc g est bien bijective et

$$g^{-1}(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

(3) Soit h l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par $h(x,y,z) = g \circ f(x,y,z)$. Par définition, on a

$$h(x,y,z) = g(2x+y, x-3y) = (2x+y+x-3y, 2x+y-x+3y) = (3x-2y, x+4y).$$

Il est clair que h ne peut pas être bijective car elle n'est pas injective car son expression de dépend pas de z.

(4) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, définie par

$$\varphi(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ 2x+y-z+t,\ x-y+2z-t,\ 3x+y+z).$$

On cherche à résoudre le système $\varphi(x,y,z,t) = (1,4,-2,0)$. On utilise un pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z,t) = (1,4,-2,0) \quad &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & - & t & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2 \\ & - & 2y & + & z & - & 2t & = & -3 \\ & - & 2y & - & 2z & - & 3t & = & -3 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & 2z & & & = & 3 \\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & 4z & - & t & = & -7 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & & & t & = & 3 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & 1 \\ & & y & & & & & = & -2 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & & & t & = & 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Il y a donc un unique antécédent qui est $(1,-2,-1,3)$.

Exercice 3. (Faux Billets - D'après **ESC 2003**)

(1) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{B,\overline{B}\}$, on a

$$p = P(F) = P_B(F)P(B) + P_{\overline{B}}(F)P(\overline{B}).$$

Or, on sait (et on déduit) que:
- $P_B(F) = 1 - P_B(\overline{F}) = 1-\alpha$
- $P_{\overline{B}}(F) = \beta$
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

Ainsi,

$$p = (1-\alpha)P(B) + \beta(1-P(B)) \Longleftrightarrow P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha+\beta-1}.$$

Comme, par hypothèse, $\alpha+\beta > 1$, il suit que $\alpha+\beta-1>0$ et comme bien évidemment $P(B) \geq 0$, cela impose que le numérateur est également positif et on obtient $\beta - p \geq 0$ ou encore $p \leq \beta$. D'autre part, comme toute probabilité, $P(B) \leq 1$, ce qui donne (car le dénominateur est positif) $\beta - p \leq \alpha+\beta-1$ ou encore $p \geq 1-\alpha$. Au final, on a bien l'encadrement voulu.

(2) D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_F(B) &= \frac{P_B(F)P(B)}{P_B(F)P(B) + P_{\overline{B}}(F)P(\overline{B})} \\ &= \frac{\frac{(1-\alpha)(\beta-p)}{\alpha+\beta-1}}{\frac{(1-\alpha)(\beta-p)}{\alpha+\beta-1} + \frac{\beta(\alpha+p-1)}{\alpha+\beta-1}} \\ &= \frac{(1-\alpha)(\beta-p)}{p(\alpha+\beta-1)}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(3) D'après les notations du texte:
- $\alpha+\beta-1 = 2\alpha-1 = 1.9-1 = 0.9$
- $p = x+0.05$
- $\beta - p = 0.9 - x$
- $1-\alpha = p - x = 0.05$

Il suit que

$$\begin{aligned} 1 - P_F(B) &= 1 - \frac{0.05(0.9-x)}{0.9(x+0.05)} \\ &= \frac{0.9(x+0.05) - 0.05(0.9-x)}{0.9(x+0.05)} \\ &= \frac{0.95x}{0.9(x+0.05)}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Exercice 4.

(1) (a) Si on sait qu'on lance la pièce A au n-ième coup, on continuera à lancer la pièce A au coup suivant si on fait *FACE*. Avec la pièce A, la probabilité de faire *FACE* vaut $2/5$ donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 2/5$. Dans l'autre cas, cela veut dire qu'on change de pièce donc qu'on a fait *PILE* avec la pièce B, ce qui se passe avec probabilité $3/10$ donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 3/10$.

(b) Comme $\{A_n, \overline{A}_n\}$ est un système complet d'évènement, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A}_n}(A_{n+1})P(\overline{A}_n) \\ &= \frac{2}{5}a_n + \frac{3}{10}(1-a_n) \\ &= \frac{1}{10}a_n + \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite (a_n) est arithmético-géométrique. On suit donc le plan d'étude du cours pour déterminer son terme général:

- On cherche ℓ tel que
$$\ell = \frac{1}{10}\ell + \frac{3}{10} \Longleftrightarrow \ell = \frac{1}{3}$$
- La suite $(a_n - \ell)$ est alors géométrique de raison $1/10$ et on peut écrire
$$a_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$$
- D'après les données du texte, il est clair que $a_1 = 1/2$ (au premier lancer, la pièce est choisie aléatoirement uniformément entre les deux).
- On synthétise:
$$a_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}.$$

(c) La probabilité de faire $FACE$ au $n-$ième lancer dépend du dé avec lequel on lance. On utilise encore la formule des probabilités totales, avec le même système complet d'évènements:

$$\begin{aligned} p_n &= P(F_n) = P_{A_n}(F_n)P(A_n) + P_{\overline{A}_n}(F_n)P(\overline{A}_n) \\ &= \frac{2}{5}a_n + \frac{7}{10}(1-a_n) \\ &= \frac{7}{10} - \frac{3}{10}a_n \\ &= \frac{7}{10} - \frac{3}{10}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}. \end{aligned}$$

(2) On peut commencer par exprimer B_k à l'aide d'intersections:

$$B_k = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k \cap F_{k+1} \cap ... \cap F_n.$$

(a) Afin de déterminer $P(B_1)$ et $P(B_n)$, il faut savoir quelle est la pièce avec laquelle on commence. On va donc utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{A_1, \overline{A}_1\}$:

$$P(B_1) = P_{A_1}(B_1)P(A_1) + P_{\overline{A}_1}(B_1)P(\overline{A}_1) = \frac{1}{2}\left(P_{A_1}(B_1) + P_{\overline{A}_1}(B_1)\right).$$

Ensuite, pour calculer chacune de ces probabilités conditionnelles, on utilise la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned} P_{A_1}(B_1) &= P_{A_1}\left(\overline{F}_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n\right) \\ &= P_{A_1}(\overline{F}_1)P_{A_1\cap\overline{F}_1}(F_2) \cap ... \cap P_{A_1\cap\overline{F}_1\cap F_2\cap...\cap F_{n-1}}(F_n) \\ &= \frac{3}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

car si on fait *PILE* au premier coup avec la pièce A, on lance ensuite la pièce B. Comme on fait successivement $n-1$ fois *FACE*, on garde cette pièce jusqu'à la fin. De la même manière, on trouve

$$P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Au final, on obtient

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{3}{20}\left(2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

On suit le même raisonnement pour $P(B_n)$:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \frac{1}{2}\left(P_{A_1}(B_n) + P_{\overline{A_1}}(B_n)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\frac{3}{5} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\frac{3}{10}\right) \\ &= \frac{3}{20}\left(2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

On remarque que

$$P(B_1) + P(B_n) = \frac{9}{20}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\right).$$

(b) C'est encore le même raisonnement:

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \frac{1}{2}\left(P_{A_1}(B_k) + P_{\overline{A_1}}(B_k)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\frac{3}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} + \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}\frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-k}\right). \\ &= \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} + \frac{3}{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

(c) La probabilité cherchée est celle de la réunion des B_k. Cette réunion étant disjointe, on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\ &= P(B_1) + P(B_n) + \sum_{k=2}^{n-1} P(B_k) \\ &= \frac{9}{20}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\right) + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} + \frac{3}{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{9}{20}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{7}\right)^{k} + \frac{3}{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{4}\right)^{k} \\ &= \frac{3}{2}\left(\left(\frac{7}{10}\right)^{n} - \left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right) \end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{4}{7}\right)^k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{4}{7}\right)^{n-2}\right)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{7}{4}\right)^k = -\frac{7}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\right).$$