ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3

Durée : 4 heures

Exercice 1. On considère les deux matrices carrées réelles suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer K^2.
(b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

(2) Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
(a) Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.
(b) En déduire que, si a et b sont tous les deux non nuls, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.
(c) *Application :* Justifier que la matrice ci-dessous est inversible et donner son inverse

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$ et préciser ses limites aux bords de ce même intervalle.

(2) (a) À l'aide du développement limité d'ordre 2 rappelé ci-dessous, montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ puis y calculer $f'(x)$.
(c) À l'aide du même DL, déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
(d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$.

(3) (a) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ et en déduire les variations de f.
(b) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in [0;1[$ tel que $f(u_n) = n$. Préciser la valeur de u_1.

(4) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(5) Compléter les zones en pointillés pour que le script suivant (sous `SciLab`) affiche une valeur approchée de u_n à 0.001 près, où n est choisi par l'utilisateur:

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=...........................................
    else
        y=...........................................
    end
endfunction

n=input('Entrer une valeur de n>=2: ');

function y=g(x)
    y=f(x)-n;
endfunction

a=0.5;
b=0.999;
c=(b+a)/2;
    while abs(b-a)>0.001
        if .......................... then
            b=c;
        else
            ..........................
        end
        c=...............................................
    end
disp(............., 'une solution de u_n à 0.001 près est ')
```

Exercice 3.
Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

(1) **Étude des variations de la fonction f_a .**
(a) Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
(b) Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
(c) Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.
(d) En déduire que

$$\forall t > 0, \qquad f_a(t) \geq a.$$

(2) **Étude de la convergence de la suite** $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

(a) Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

(b) Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que, pour tout réel $t > a$,

$$0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq a$.

(d) Prouver alors que pour tout entier n non nul

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(u_n - a\right),$$

puis que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

(e) En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

(f) En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage `SciLab` permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite à récurrence linéaire d'ordre 3 définie ci-dessous par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_2 & = & -1 \\ u_{n+3} & = & u_{n+2} + u_{n+1} - u_n \end{array}\right. .$$

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de u_n en fonction de n. On note, pour tout entier n,

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n, $\quad V_{n+1} = M \cdot V_n$.

(b) Démontrer que, pour tout entier n, $V_n = M^n V_0$.

(2) On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = N + D.$$

(a) Déterminer la matrice P telle que $A \cdot P = P \cdot B$ avec P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix}.$$

(b) Monter que P est inversible et préciser P^{-1}.

(c) Montrer que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ et en déduire A^n en fonction de B^n.

(3) (a) Calculer N^2 et en déduire pour tout n entier la valeur de N^n.

(b) En déduire la valeur de B^n en fonction de n.

(c) Calculer enfin V_n puis u_n en fonction de n.