ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3

Durée : 4 heures

Exercice 1. (D'après **EML 2002**). On considère les deux matrices carrées réelles suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Le calcul donne sans mal $K^2 = -I$.
(b) On a trouvé $K^2 = -I$, ou encore $K \cdot (-K) = I$. Ainsi, K est inversible et $K^{-1} = -K$.

(2) Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
(a) On développe en utilisant le fait que I et K commutent (car I commute avec toute matrice):

$$\begin{array}{rcl} M^2 & = & (aI + bK)^2 \\ & = & a^2I + 2abK + b^2K^2 \\ & = & (a^2 - b^2)I + 2abK \qquad (\text{car} K^2 = -I) \\ & = & (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) \\ quad(\text{car} bK = M - aI) & & \\ & = & -(a^2 + b^2)I + 2aM, \end{array}$$

ce qui était la formule attendue.
(b) La relation précédente s'écrit aussi $2aM - M^2 = (a^2 + b^2)I$ ou encore $M\,(2aI - M) = (a^2 + b^2)I$. Ainsi, si $a^2 + b^2$ est non nul (ce qui est équivalent au fait que a et b soient simultanément non nuls), on voit que (en divisant par $a^2 + b^2$), M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\,(2aI - M)\,.$$

(c) *Application :* La matrice ci-dessous, que l'on note J, s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}I + K$$

Ainsi, par la question précédente, J est inversible et

$$J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^2 + 1^2}\left(2\sqrt{2}I - J\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (D'après **EDHEC 2009**)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Comme on connait son cours sur le bout des doigts, on hésite pas une seule seconde à appliquer la limite usuelle

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

En prenant $u = -x$ on a bien que $f(x) \longrightarrow 1 = f(0)$, $x \to 0$ et f est continue en 0. Ailleurs, c'est un quotient de fonctions usuelles, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc c'est continue. Au final, c'est continu partout partout.

(2) (a) On va donc utiliser le DL ci-dessous pour comparer les termes du quotient du taux d'accroissement de f en 0.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-x-(1-x)(-x-x^2/2+o(x^2))}{(x-x^2)(-x+o(x))} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{1/2+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{2}, x \to 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.

(b) En dehors de 0, f est de classe $\mathcal{C}^1$ car les fonctions (usuelles) qui la composent le sont et le dénominateur ne s'annule pas. Les formules de dérivation donnent

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x(-1-\ln(1-x))}{(1-x)^2\ln(1-x)^2} = \frac{-\ln(1-x)-x}{(1-x)^2\ln(1-x)^2}.$$

(c) C'est comme précédemment:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\ln(1-x)-x}{(1-x)^2\ln(1-x)^2} \\ &= \frac{x+x^2/2+o(x^2)-x}{(1-x)^2(-x+o(x))^2} \\ &= \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{1/2+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{2},\ x \to 0 \end{aligned}$$

(d) Ainsi, f' est continue en 0, donc f es de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$.

(3) (a) On pose $h(x) = \ln(1-x) + x$. La fonction h est définie et dérivable sur $]-\infty;1[$ et

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$

ce qui permet de déterminer le sens de h puis son signe:

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$
h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(0)=0$	$\searrow$	$-\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$

Or, $h(x)$ déterminé également le signe de $f'(x)$ car , pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{-h(x)}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} > 0$$

et f est strictement croissante. Voici son tableau de variations

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;1[$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de $]-\infty;1[$ sur $]0;+\infty[$. Ainsi, tout élément strictement positif admet un unique antécédent par f. C'est en particulier le cas pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, et on note cet antécédent u_n.

Par définition, u_1 est l'antécédent de 1, c'est à dire la solution de $f(x) = 1$. Or, on sait que $f(0) = 1$, donc $u_1 = 0$.

(4) Pour montrer que la suite (u_n) converge, on cherche à appliquer le théorème de convergence monotone. La suite est clairement majorée par 1 puisque l'antécédent u_n est dans l'ensemble de définition de f, àç savoir $]-\infty;1[$, donc $u_n < 1$. De plus, notant f^{-1} la bijection réciproque de f (qu'on sait être strictement croissante par le théorème de bijection)

$$f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n)$$

or, $n < n+1$ implique donc que $u_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = u_{n+1}$ et on a la monotonie cherchée. On sait donc que (u_n) converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq 1$. Par définition de u_n

$$f(u_n) = n.$$

Si $\ell < 1$, alors, comme f est continue sur $]-\infty;1[$, $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$. Or, le terme de droite tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire. Ainsi $\ell = 1$ ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

(5) On propose le script suivant, complété sans difficulté à partir de programme de dichotomie bien maîtrisé.

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=1;
    else
        y=-x/((1-x)*log(1-x));
    end
endfunction

n=input('Entrer une valeur de n>=2: ');

function y=g(x)
    y=f(x)-n;
endfunction

a=0.5;
b=0.999;
c=(b+a)/2;
    while abs(b-a)>0.001
        if g(a)*g(c)<0 then
            b=c;
        else
            a=c;
        end
        c=(a+b)/2
    end
disp(c, 'une solution de u_n à 0.001 près est ')
```

Exercice 3. (D'après **ECRICOME 2007**)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right),$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f_a(u_n).$$

(1) **Étude des variations de la fonction f_a**

(a) En $+\infty$, $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \to +\infty$ car $a > 0$. De plus, on a

$$f_a(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{a^2}{t}$$

donc $\mathcal{C}_f$ présente une asymptote d'équation $y = \frac{1}{2}t$ car $\frac{1}{2}\frac{a^2}{t} \to 0$ en $+\infty$. Comme $\frac{1}{2}\frac{a^2}{t} > 0$, alors la courbe représentative de f_a est au dessus de l'asymptote.

(b) En 0^+:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \to +\infty.$$

On a donc une asymptote verticale d'équation $t = 0$.

(c) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}.$$

Ceci permet de facilement dresser le tableau de variations de f_a:

t	0		a		$+\infty$
$f_a'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_a	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Comme $f_a(a) = a$ est le minimum de f_a, alors

$$\forall t > 0 : f_a\left(t\right) \geq f_a\left(a\right) = a.$$

(2) **Étude de la convergence de la suite** (u_n)

(a) Dans le cas où $u_0 = a$, comme $f_a\left(a\right) = a$, on aura (par une récurrence immédiate) une suite constante égale à a.

(b) On a

$$f_a'\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{t^2}$$

et comme $a^2/t^2 > 0$ alors $f_t'\left(t\right) < 1/2$ et, comme on a aussi, pour tout $t > a$, $f_a'\left(t\right) > 0$, on a finalement, pour tout $t > a$,

$$0 < f_a'\left(t\right) < \frac{1}{2},$$

ce qu'on voulait.

(c) On procède par récurrence (et c'est fastoche)

- $u_1 \geq f_a\left(u_0\right) \geq a$ car $f_a\left(t\right) \geq a$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$
- Soit $n \geq 1$ tel que $u_n \geq a$ alors $u_{n+1} = f_a\left(u_n\right) \geq f_a\left(a\right) = a$ car f_n est strictement croissante sur $[a, +\infty[$ et que u_n et a en sont éléments. La propriété est donc bien héréditaire.

(d) On utilise alors l'inégalité des accroissements finis (IAF) combinée à une récurrence, comme on l'a déjà vu (c'est classique de chez classique):

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1} - a| & = & |f(u_n) - f(a)| \\ & \leq & \max\limits_{a \leq t \leq u_n} |f('t)||u_n - a| \qquad \text{(D'après IAF entre } u_n \text{ et } a\text{)} \\ & = & \dfrac{1}{2}|u_n - a| \qquad \text{(D'après } (2b)\text{)} \end{array}$$

La suite est une récurrence que l'on fait *fingers in the nose*

- $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$
- Soit $n \geq 1$ tel que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

Alors,

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1} - a| & \leq & \dfrac{1}{2}|u_n - a| \qquad \text{(D'après IAF appliquée ci-dessus)} \\ & \leq & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| \qquad \text{(D'après HR)} \\ & \leq & \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} |u_1 - a|, \end{array}$$

(e) Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement précédent assure que $u_n - a$ tend vers 0 ou encore que u_n tend vers a. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

(f) La suite précédente convergera vers $\sqrt{2}$ si $a = \sqrt{2}$. On prend donc $u_0 = 1$, et on propose le script suivant pour afficher les termes de u_0 à u_{99}:

```
function y=f(t)
    y=1/2*(t+2/t);
endfunction

u=1;
disp(u)
for k=1:99
    u=f(u);
    disp(u)
end
```

Exercice 4.

(1) (a) Les données de l'énoncé permettent d'établir sans difficulté que

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} V_n = MV_n.$$

(b) Une récurrence immédiate permet alors d'obtenir (comme pour les suites géométriques) que, pour $n \geq 0$,

$$V_n = M^n V_0,$$

ce qui motive de calculer les puissances de la matrice M.

(2) (a) Il suffit de calculer AP puis PB et d'identifier les coefficients. On obtiendra un système très facile à résoudre.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x-y & 1+a-b & 1+u-v \\ 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & x+a & -u \\ y & y+b & -v \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire

$$AP = PB \iff \left\{\begin{array}{rcr} 1+x-y & = & 1 \\ 1+a-b & = & 2 \\ 1+u-v & = & -1 \\ x & = & 1 \\ x+a & = & 1 \\ -u & = & 1 \\ y & = & x \\ y+b & = & a \\ -v & = & u \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ a & = & 0 \\ b & = & -1 \\ u & = & -1 \\ v & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On montre que P est inversible et on détermine son inverse par un pivot de Gauss, dont voici les étapes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

et donc

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Le calcul donne

$$\begin{aligned} PBP^{-1} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Il suit que
$$A^n = (PBP^{-1})^n = PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots PBP^{-1} = PB^nP^{-1}.$$

(3) (a) On voit très rapidement que $N^2 = 0$, ce qui entraîne également que $N^p = 0$, pour tout entier $p \geq 2$.

(b) Par définition, $B = N + D$. On vérifie (et c'est indispensable) que N et D commutent (ce n'est pas du tout automatique, D est diagonale mais ce n'est pas un multiple de l'identité!) et on peut donc appliquer la formule du binôme, en remarquant que, D étant diagonale:
$$D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^p \end{pmatrix}$$
et il suit que
$$\begin{aligned}
B^n &= (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k B^{n-k} \qquad (\text{car } N^k = 0, \text{si } k \geq 2) \\
&= B^n + nNB^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) On en déduit directement A^n
$$\begin{aligned}
A^n &= PB^nP^{-1} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & (n+1) & (-1)^n \\ 1 & n & (-1)^{n+1} \\ 1 & (n-1) & (-1)n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2n+3+(-1)^n & 2\left(1+(-1)^{n+1}\right) & (-1)^n - 2n - 1 \\ 2n+1+(-1)^{n+1} & 2\left(1+(-1)^{n+2}\right) & (-1)^{n+1} - 2n + 1 \\ 2n-1+(-1)^n & 2\left(1+(-1)^{n+1}\right) & (-1)^n - 2n + 3 \end{pmatrix}.$$
Comme $M = A$, on a $V_n = A^nV_0$. Des conditions initiales $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on déduit finalement
$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{4}\left(-1\left(2n-1+(-1)^n\right) + 2\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right) \\
&= \frac{-2n+3+3(-1)^{n+1}}{4}.
\end{aligned}$$