ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4

Durée : 4 heures

Exercice 1. Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

(2) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

(c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, $\ln(1+x) \leq x$.

(d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

(3) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, \mathrm{e}^2]$.

(4) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

(d) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$$

puis, conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 2. Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

(1) Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A?

(2) À partir d'un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$).

   On introduit, pour $k \geq 1$, les évènements A_k "le serveur choisi le jour k est le serveur A" et B_k l'évènement correspondant au choix du serveur B le jour k.

   On note, pour $n \geq 1$, L_n l'évènement "la première série est de longueur n" et M_n l'évènement analogue pour la seconde série.

   Ainsi, $k \geq 1$, L_k est réalisé si, pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et l'autre serveur le $(k+1)-$ème jour.

   (a) Montrer que, presque sûrement, le serveur A sera choisi et qu'il en est de même pour le serveur B.
   (b) Justifier soigneusement, en écrivant L_k à l'aide des évènements A_i et B_j, que, pour tout $k \geq 1$,
   $$P(L_k) = (0.3)^k\,(0.7) + (0.7)^k\,(0.3)\,.$$
   (c) Vérifier, tout aussi soigneusement, par le calcul que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_k) = 1.$$
   (d) Justifier que la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_k)$ est convergente et calculer sa somme. (On interprètera cette valeur comme la *longueur moyenne* de la première série de serveurs.)
   (e) Pour chaque $k, j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(L_k \cap M_j)$.
   (f) En déduire, à l'aide d'une formule que l'on nommera, les valeurs de $P(M_j)$ pour tout $j \geq 1$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par
$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4, \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

(1) Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K?
(3) Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base canonique.
(4) On introduit alors les vecteurs
$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Exprimer, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire la matrice de f, notée L, dans la base $\mathcal{C}$.

(5) On introduit la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Que vaut $P^{-1}KP$?

Exercice 4. (Simulations sous `SciLab`) Les deux questions sont indépendantes.

(1) On considère une expérience aléatoire présentant deux issues: une que l'on appelle *succès*, et qui se produit avec probabilité $p \in]0;1[$, et l'autre que l'on appelle *échec*.
   (a) Que fait la fonction suivante

```
function y=exo4(p)
    y=1;
    while rand()<p
        y=y+1;
    end
endfunction
```

   (b) Écrire une fonction `y=second_succes(p)` permettant de renvoyer le nombres de répétitions successives nécessaires à l'apparition d'un second succès.

(2) Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive - jusqu'à ce que l'un des deux marque un but. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque deux fois sur trois alors que son ami ne marque qu'une fois sur deux.
   (a) Recopier et compléter la succession d'instructions sous `SciLab` simulant cette confrontation et affichant le nom du gagnant ainsi que le nombre de tirs qu'il a effectués.

```
   
   
   n=1;
   O=0;
   T=0;
   while O==0 & T==0
       if .............. then
           O=..................
       else
           if .............. then
               T=1;
           end
       end
       n=.........................................
   end
   if T==1 then
       ..............................................
   else
       ..............................................
   end
```

   (b) Le jeu est-il équilibré?