ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°11

Simulation de variables aléatoires à densité

☞ On rappelle que les instructions `rand(1,N)` ou `rand(1:N)` permettent de créer un vecteur ligne dont les N composantes sont des réalisations (indépendantes) de la loi appelée avec la fonction `rand()`. (On peut, en permutant les deux arguments créer aussi un vecteur colonne.)

Exercice 1. (Avec la fonction `rand()`).

(1) À l'aide de la fonction `rand()`, écrire une fonction `unif(a,b)` simulant une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$.
(2) L'instruction `rand('normal')` indique que dorénavant, chaque appel de la fonction `rand()` simulera une loi normale centrée-réduite. Écrire alors une fonction `LaplaceGauss(mu,sigma)` simulant une variable aléatoire de loi de Laplace-Gauss de paramètres μ et σ^2.

Exercice 2. Soient U une variable aléatoire uniforme sur $[0;1]$, $\lambda > 0$ et

$$V = \frac{-\ln(1-U)}{\lambda}.$$

(1) Créer un échantillon de taille 10000 de la même loi que V pour $\lambda = 2$.
(2) Tracer l'histogramme des valeurs de V sur l'intervalle $[0;2]$ avec 20 classes de même largeur. Sur le même graphique, tracer la courbe de la fonction $t \mapsto 2e^{-2t}$. Que peut-on en déduire?
(3) Démontrer le résultat.

☞ Il est important de garder à l'esprit cette méthode pour simuler une loi exponentielle que l'on utilisera notamment dans l'exercice qui suit.

Exercice 3. (D'après **HEC 2017**) Pour $a, b > 0$, on introduit la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité et préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire correspondante.

On dira qu'une variable aléatoire X ayant pour densité $f_{a,b}$ suit une loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, ce qu'on notera $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.

(2) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose

$$X = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}.$$

(a) Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.
(b) En déduire l'écriture d'une fonction `y=grandlinexp(a,b,n)` permettant de générer un vecteur colonne de taille n dont chaque composante suit une loi exponentielle linéaire de paramètres a et b.

☞ L'instruction `grand(m,n,'nor',mu,sigma)` simule une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ (et crée une matrice à m lignes et n colonnes) et `grand(m,n,'exp',lambda)` une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Concernant la **fonction de répartition** de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, la fonction `cdfnor()` permet de "tout" calculer. Mais il faut être vigilant quant aux arguments qu'elle prend. Plus précisément

- `[P,Q]=cdfnor("PQ",x,mu,sigma)` correspond à la formule
$$P = \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t, \qquad Q = 1 - P.$$
- `X=cdfnor("X",mu, sigma, mu, P, Q)` permet de calculer $\Phi^{-1}_{\mu,\sigma^2}(P)$ en connaissant μ, σ et P mais en précisant $Q = 1 - P$.
- `M=cdfnor("Mean", sigma, mu, P, Q, X)` sert à calculer l'espérance d'une variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ connaissant σ et $P(Z \leq x) = P$.
- `S=cdfnor("Std", mu, X, P, Q)` sert à résoudre le problème analogue avec μ connu mais pas σ (attention à l'ordre des arguments!).

Exercice 4. Comparer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et la fonction de répartition empirique à partir d'un échantillon de taille 1000 sur l'intervalle $[-2;2]$ avec 50 points.