ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Informatique - T.P n°3

Combinatoire, Dénombrement. Paradoxe des anniversaires.

On commencera par créer, dans son dossier personnel, un dossier intitulé "TP3" dans lequel on pourra enregistrer tous les programmes (au format *.sce*) ou fonctions (au format *.sci*) relatifs à cette nouvelle feuille d'exercices.

Exercice 1. (Combinatoire)

(1) Écrire une instruction très simple permettant de calculer $n!$.
(2) Utiliser cette instruction pour en écrire deux fonctions `y=A(n,k)` et `y=C(n,k)`, prenant toutes deux pour arguments n et k, où n est un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n et permettant de calculer respectivement A_n^k et $\binom{n}{k}$.
(3) Vérifier avec `SciLab` que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(4) Calculer avec `Scilab`:
   (a) La probabilité de gagner à l'*Euromillion* (pour remplir une grille, on choisit 5 nombres entre 1 et 50, puis deux nombres complémentaires entre 1 et 10);
   (b) La probabilité d'obtenir une *quinte flush* (cinq cartes d'une même couleur qui se suivent) lors de la distribution d'une main de cinq cartes (avec un jeu de 32 cartes).

Exercice 2. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est appelé *nombre factoriel* s'il peut s'écrire comme la factorielle d'un nombre entier, c'est à dire si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n!$.

(1) Écrire un programme `SciLab` qui compte le nombre de nombres factoriels inférieurs ou égaux à 10^6, 10^9, 10^{12} et $17!$.
(2) Les nombres 3629300 et 39916800 sont-ils des nombres factoriels?

Exercice 3. (Triangle de Pascal)

(1) Rappeler la formule du triangle de Pascal.
(2) Écrire alors un programme qui affiche les m premières lignes du triangles de Pascal, où m est un entier positif rentré par l'utilisateur.

Exercice 4. (Paradoxe des anniversaires)

L'objectif de cet exercice est de visualiser l'évolution de la probabilité qu'au moins deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour, en fonction du nombre d'individus dans le groupe.

Partie 1 - Préliminaires probabilistes. On suppose, pour simplifier, qu'une année n'est constituée que de 365 jours et que les naissances sont réparties uniformément tout au long de l'année.

On considère alors un groupe de n individus et on appelle Ω l'ensemble des listes ordonnées constituées des n dates d'anniversaire des membres de ce groupe (on ne s'intéresse pas à l'année de naissance mais seulement au jour et au mois). L'hypothèse précédente nous mène à considérer une probabilité uniforme P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(1) Quel est le cardinal de Ω?
(2) On s'intéresse à l'évènement A: "au moins deux personnes du groupe fêtent leur anniversaire le même jour". Quel est l'évènement contraire de A?
(3) Calculer, en fonction de n, la probabilité de $\overline{A}$. En déduire celle de A, notée p_n.

Partie 2 - Utilisation de `SciLab`.

(1) À l'aide des résultats de la partie précédente, écrire une fonction `anniversaire()` qui prend en argument un nombre entier naturel `n` et renvoie la valeur de la probabilité p_n.
(2) Écrire un programme permettant de déterminer le nombre minimum de personnes nécessaires pour que la probabilité p_n soit supérieure à 50%. Même question avec 99%.
(3) Représenter graphiquement l'évolution de la suite (p_n) pour n entre 1 et 60.

Partie 3 - À date choisie. Quelle est par contre, en fonction du nombre n de personnes dans le groupe, la probabilité qu'au moins deux personnes soient nées un 3 Janvier? Calculer cette probabilité, avec `SciLab`, pour un groupe de 18 personnes.