ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Informatique - T.P n°6

Recherche de solution de $f(x) = 0$ par dichotomie

On rappelle le résultat suivant du cours, conséquence du **théorème des valeurs intermédiaires**, (Chapitre 9) sur lequel est basé ce TP:

Proposition. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a; b]$ et que $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors il existe $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

La méthode de **dichotomie** est, en mathématiques, un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

Ainsi, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, on sait qu'il existe au moins une solution à $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a; b]$ mais on ne sait pas où. La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant le milieu

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Il y a maintenant deux possibilités :

- Ou bien $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires et la solution cherchée est donc dans l'intervalle $[a; c]$;
- Ou bien cela se passe entre c et b.

Pour obtenir une valeur approchée de α à ϵ près, on construit donc une suite d'intervalles $[a_n; b_n]$ dont la longueur est divisée par deux à chaque étape et qui contiennent tous α. Quand la longueur de l'intervalle $[a_n; b_n]$ est plus petite que ϵ, on s'arrête et le milieu de l'intervalle fournit alors une valeur approchée de α à ϵ près.

On part du principe que ni a ni b n'est solution de l'équation...

Plus précisément, on construit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) selon le procédé suivant:

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ c_0 &= \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Puis, supposant a_n, b_n et c_n construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- Si $f(a_n)f(c_n) = 0$, alors $\alpha = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin,

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

(1) Que vaut $b_n - a_n$? En déduire que pour toute précision (arbitrairement petite) $\epsilon > 0$, il existe un rang n pour lequel la longueur de l'intervalle contenant α est plus petite que ϵ.

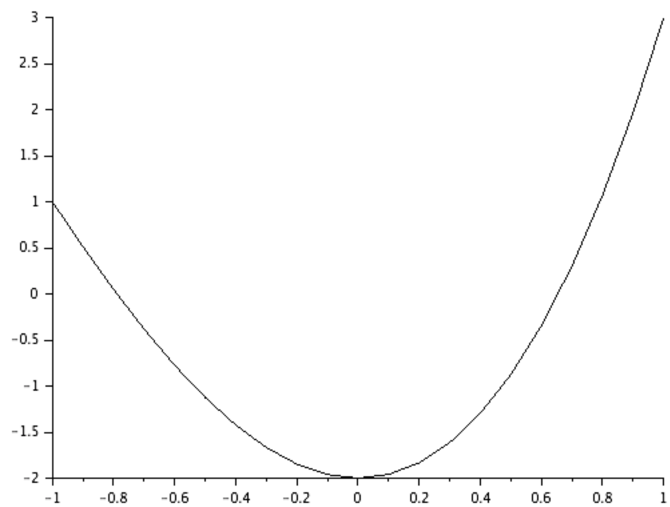
(2) Écrire une fonction `dichotomie()` prenant en argument une fonction f, les extrémités a et b de l'intervalle de recherche et la précision ϵ et renvoyant une valeur approchée à ϵ près de α.

(3) Utiliser le programme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la solution de l'équation
$$x + \ln(x) = 2.$$

(4) Quelle solution est renvoyée si la fonction f admet plusieurs solutions sur l'intervalle $[a; b]$?

(5) Écrire une fonction `get_zeros()` prenant en argument un entier n, une fonction f, les extrémités a et b d'un intervalle, et la précision ϵ à laquelle on veut que la fonction renvoie les n (plus petites) solutions (sous forme de vecteur) de l'équation $f(x) = 0$ comprises dans l'intervalle $[a; b]$.

(6) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x^2 - 2$. On présente ci-dessous la courbe de g sur $[-1; 1]$ affichée par `SciLab`.



(a) Donner une suite d'instructions qu'on aurait pu utiliser dans la console de `SciLab` pour obtenir la figure ci-dessus (on pensera à définir notamment la fonction g).

(b) Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ admet-elle sur $[-1; 1]$? Donner un encadrement, obtenu par lecture graphique, à 10^{-1}, de chacune des solutions.

(c) On voudrait déterminer les solutions précédentes une précision arbitrairement petite. On utilise pour cela le principe de dichotomie. Qu'affiche `SciLab` si on saisit `dichotomie(g,-1,1,0.1)`?

(d) Utiliser la fonction `get_zeros()` pour déterminer toutes les solutions avec la précision 0.001.

(7) Définir et représenter sur $[0; 3]$ la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & \text{si } x < 1/2 \\ -2, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}.$$

Que renvoie `dichotomie(h,0,1,0.05)`? Comment expliquer cela?