ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Informatique - T.P n°7

Séries numériques, opérations pointées

☞ Si `x` est une matrice (et *a fortiori* un vecteur ligne ou colonne), l'opération `x.^k` permet de définir la matrice obtenue en élevant chaque coefficient de `x` à la puissance `k`.

Exercice 1. (Opérations pointées, Séries de Riemann, Série Alternée)

(1) À l'aide d'opérations pointées, définir trois vecteurs `y1, y2` et `y3` où $y_j(k) = 1/k^j$, $j = 1, 2, 3$ et $1 \leq k \leq 20$. Représenter sur un même graphique les fonctions en escalier correspondantes à l'aide de la commande `plot2d2()`. Interpréter le résultat et retrouver le critère de convergence du cours sur les séries de Riemann.

(2) Représenter la fonction en escalier correspondant à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Justifier graphiquement de la convergence de la série.

(3) On admet qu'il est possible de montrer que, si $p \in [\![1; 4]\!]$, il existe des nombres entiers r_p tels que les sommes de Riemann soient de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{\pi^{2p}}{r_p}.$$

Vérifier qu'on semble bien trouver $r_1 = 6$. Conjecturer les valeurs de r_2, r_3 et r_4.

Exercice 2. (Séries de Bertrand) On appelle *série de Bertrand* toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

(1) Que peut-on dire de la nature des séries de Bertrand si $\alpha > 1$?

(2) On suppose que $\alpha < 1$. Soit alors γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = +\infty.$$

En déduire la nature des séries de Bertrand pour $\alpha < 1$.

(3) Dans toute la suite, on s'intéresse donc aux séries de Bertrand avec $\alpha = 1$. On note

$$S_{n,\beta} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}.$$

(a) Écrire une fonction `Bertrand()` prenant en argument un entier $n \geq 2$ et un réel β et renvoyant $S_{n,\beta}$. On utilisera la fonction `sum()` et des opérations pointées.

(b) Construire les nuages de points $\{(n, S_{n,\beta})\}_{2 \leq n \leq 200}$ pour différentes valeurs de β ($\beta < 1$, $\beta = 1$ et $\beta > 1$). Conjecturer alors une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la série converge.

Exercice 3. (Inspiré de **EML 2011**). On considère, pour $n \geq 1$, la fonction g_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

(1) Représenter simultanément les fonctions g_1, g_2 et g_{10} sur l'intervalle $[0; 20]$. Vérifier qu'elles admettent un maximum dont on donnera une valeur approchée.
(2) Déterminer rigoureusement la valeur du maximum M_n de la fonction g_n.
(3) Représenter, dans une autre fenêtre, le nuage de points $\{(n, \sum_{k=1}^{n} M_k)\}_{1 \leq n \leq 100}$. Interpréter le résultat.
(4) On pose $\mu_n = \sqrt{n} M_n$. Vérifier avec `SciLab` que la suite (μ_n) converge et donner une valeur approchée à 10^{-3} de sa limite.
(5) Utiliser le résultat de la question précédente pour justifier le résultat observé à la question (3).

Exercice 4. (Inspiré de **ISC 1991**)

On considère la série de terme général $a_n = \frac{n-1}{n^3+1}$ (pour $n \geq 1$) et on note (A_n) la suite de ses sommes partielles.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(2) En déduire que la série est convergente. On note A sa somme.
(3) Pour $1 \leq n < N$, on pose $R_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} a_k$. Donner un majorant de $R_{n,N}$ dépendant de n et N puis, en faisant tendre $N \to +\infty$, montrer que

$$A - A_n \leq \frac{1}{n}.$$

(4) Que fait alors le programme `SciLab` suivant? Justifier.

```
epsilon=input();
N=floor(1/epsilon)+1;
x=1:N;
a=sum(((x.^3+1).^(-1)).*(x-1));
disp(a)
```

Exercice 5. (Développement asymptotique de la série harmonique)

(1) Écrire une fonction `harmonique(n)` permettant de calculer la $n-$ième somme alternée de la série harmonique, notée H_n. Conjecturer alors la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}.$$

(2) On écrit alors $H_n = \ln(n) + r_n$. Comment se traduit la conjecture établie à la question précédente sur (r_n)?
(3) On calculant, toujours avec `SciLab`, des valeurs de r_n pour n très grand, expliquer pourquoi on a envie d'écrire

$$r_n = \gamma + \epsilon_n,$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\epsilon_n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty$.

(4) En admettant que r_{100000} donne une approximation de γ à 0.001 près, donner cette approximation.

L'étude ainsi réalisée avec `SciLab` nous porte à croire que l'on pourrait écrire

$$(\star) \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n, \qquad \text{où } \lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0.$$

La constante γ s'appelle la *constante d'Euler*[1].

On note A_n la somme partielle de la série alternée, qu'on sait converger vers un réel ℓ

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

(5) Montrer que

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \qquad \text{et que} \qquad A_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

(6) En déduire que

$$A_{2n} = H_n - H_{2n}.$$

(7) En admettant que la formule $(\star)$ est vraie[2], déterminer la valeur exacte de ℓ.

[1]Le calcul de γ par la méthode suggérée est extrêmement lent et imprécis. Euler fut le premier à proposer une méthode pour déterminer les 16 premières décimales de γ (ca. 1750) . Nombreux mathématiciens ont travaillé au cours des siècles à la détermination de davantage de décimales. En 2008, Kondo et Pagliarulo obtiennent 10 milliards de décimales. Par ailleurs, on ne sait toujours pas si γ est un nombre rationnel ou non!

[2]C'est le cas; la démonstration repose sur des comparaisons avec des intégrales.