ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 11. (Étude élémentaire des) Séries numériques

Ce chapitre présente la notion de série numérique ainsi que les premiers éléments d'étude de ces objets. On y introduit notamment quelques séries de référence et des techniques de calcul de sommes. Ces notions seront largement complétées en seconde année mais seront tout de même nécessaires dès cette année pour introduire la notion d'espérance d'une variable aléatoire discrète.

1 Notion de série numérique

Les séries sont un type de suite que l'on a déjà rencontré; il s'agit de suites définies par une somme.

1.1 Exemples et définitions

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La **série** de terme général u_n est la suite (S_n) définie par*

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*Le terme S_n est appelé la **somme partielle d'indice** n de la série. La série est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.*

Exemple. Les séries qui suivent ont une importance particulière:

(1) la série $\sum_{n\geq 0} q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$, est la **série géométrique** de raison q.

(2) la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, avec $x \in \mathbb{R}$, est la **série exponentielle**.

(3) la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est une **série de Riemann**.

(4) la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. (C'est aussi une série de Riemann pour $\alpha = 1$.)

☞ Donner l'expression générale de la somme partielle d'une série géométrique en fonction de q (distinguer $q = 1$ et $q \neq 1$).

☞ **Remarque importante.** On peut établir une relation simple entre la somme partielle d'une série et son terme général. En effet, on constate (grâce à la relation de Chasles) que, si S_n représente la somme partielle de la série de terme général u_n, on a

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k = u_n. \tag{1.1}$$

1.2 Séries convergentes - Séries divergentes

Tout comme les suites, dont elle font partie, on s'intéresse au comportement des séries quand l'indice tend vers l'infini.

Définition 2. *La série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est dite*

- ***convergente*** *si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la* ***somme*** *de la série et on note*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

- ***divergente*** *si et seulement si* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *a une limite infinie ou pas de limite.*

☞ Étudier la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou pas. Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible.

Exemple. **Convergence des séries géométriques.** Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Considérons la série géométrique de raison q, c'est à dire la série de terme général q^n, pour $n \geq 0$. On a déjà établi au Chapitre 2 que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

ce qui permet d'énoncer le résultat suivant:

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geq 0} q^n \text{ converge } \iff |q| < 1.}$$

Dans ce cas, la somme de la série vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarque 1. Si la série $\sum_n u_n$ converge vers une limite ℓ, alors cela veut dire que la suite (S_n) converge vers ℓ mais il est alors clair que (S_{n-1}) aussi (tout comme tout autre suite extraite de la suite des sommes partielles). En passant donc à la limite dans la relation (1.1), on voit que, nécessairement,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow \ell - \ell = 0,\ n \to +\infty,$$

ce qu'on résume par l'implication **très importante**

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \Longrightarrow u_n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty.}$$

Il suit notamment que si le terme général ne tend pas vers 0, la série ne peut converger. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Exercice 1. Quelle est la nature des séries de Riemann pour $\alpha \leq 0$?

⚠ La **réciproque** de l'implication précédente est **fausse**! Il est des séries dont le terme général tend vers 0 mais qui divergent. L'exemple le plus important (à toujours avoir à l'esprit) est celui qui suit, à savoir celui de la série harmonique.

Exemple. **Divergence de la série harmonique.** Considérons la série harmonique, de terme général $u_n = 1/n$. Ici, le terme général tend bien vers 0 et pourtant la série diverge. En effet, supposons au contraire qu'elle converge vers une limite ℓ. Notant (S_n) la suite de ses sommes partielles, on a donc (S_{2n}) et (S_n) qui tendent toutes deux vers ℓ. Or, on constante que

$$0 = \ell - \ell \longleftarrow S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Ainsi, la série diverge. De plus, (S_n) étant clairement croissante

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty}$$

Exercice 2. (Convergence de la série de Riemann pour $\alpha = 2$).

On considère la série de Riemann de terme général $u_n = 1/n^2$ dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

(1) Que peut-on dire de la monotonie de (S_n)?

(2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

(3) En déduire un encadrement de S_n puis la nature de la série.

Remarque 2. (Séries de Riemann). On vient de voir trois exemples de séries de Riemann (avec $\alpha \leq 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$) dont les natures étaient différentes. Il existe un critère de convergence pour ces séries, qui sera officiellement énoncé dans le cours de deuxième année et qui repose sur une comparaison du terme général avec une intégrale. Ne pouvant laisser le suspense durer plus longtemps, on l'énonce quand même ici.

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.}$$

1.3 Opérations sur les séries convergentes

Le résultat suivant traduit le fait que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Proposition 1. Soient n_0 et n_1 deux entiers naturels. Alors, les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ ont la même nature. En revanche, si elles sont toutes les deux convergentes, leurs sommes respectives sont en générales différentes.

$$\boxed{\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq n_1} u_n \text{ converge. Mais, } \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.}$$

Exercice 3. Après avoir justifié sa convergence, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 100} \frac{1}{3^n}$.

Proposition 2. Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$, de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$, est encore convergente. Sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des sommes des deux séries.

Exercice 4. Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants:

$$(i)\ \frac{n+1}{n^2}, \qquad (ii)\ \frac{2^n - 3^n}{6^n}, \qquad (iii)\ \frac{\sqrt{n}+1}{\ln(1+n)}.$$

1.4 Convergence absolue

Définition 3. *On dit qu'une série $\sum u_n$* ***converge absolument*** *si la série $\sum |u_n|$ converge.*

☞ On constate que pour des séries dont tous les termes sont positifs, la convergence et la convergence absolue sont deux notions identiques. Il en va de même pour des séries dont tous les termes sont négatifs.

La convergence absolue implique toujours la convergence simple. La démonstration (admise ici, mais qui pourrait être un exercice intéressant pour un lecteur ambitieux) repose sur un découpage de la série selon le signe de ses termes. Le résultat est le suivant.

Théorème 1. *Si une série converge absolument alors elle converge simplement. La réciproque est fausse.*

$$\boxed{\sum |u_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge. Mais, } \sum u_n \text{ converge} \not\Longrightarrow \sum |u_n| \text{ converge.}}$$

Le contre-exemple le plus connu est celui de la série harmonique alternée, qui suit en exercice.

Exercice 5. (Série Harmonique alternée).
On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

(1) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
(2) En déduire la nature de la série harmonique alternée. Est-elle absolument convergente?

1.5 Convergence des séries à termes positifs

Si (u_n) est une suite à termes positifs, alors la suite (S_n) des sommes partielles de la série de terme général u_n est clairement croissante. Ainsi, le théorème de convergence monotone permet de justifier le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs. Si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée, alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.*

Remarque 3. On a un énoncé analogue avec une série à termes négatifs dont la suite des sommes partielles est minorée.

Une suite convergente étant majorée, il découle immédiatement le résultat suivant, extrêmement utile pour déterminer la nature des séries à termes positifs.

Corollaire 1. (Comparaison des séries à termes positifs). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

(i) Si $\sum v_n$ est convergente et si (à partir d'un certain rang), $u_n \leq v_n$ la série $\sum u_n$ est également convergente, et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
(ii) Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$) et si (à partir d'un certain rang), $u_n \leq v_n$, alors la série $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 6.

(1) On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$. En déduire que la série converge.
(2) On considère la série $\displaystyle\sum \frac{2n^2}{n^3 - \frac{1}{2}}$. Montrer que, $\forall k \geq 1$, $\displaystyle\frac{2k^2}{k^3 - \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{k}$. En déduire la nature de la série.

2 Quelques séries numériques usuelles

2.1 Séries géométriques et leurs dérivées

On a vu précédemment que les séries géométriques étaient convergentes si et seulement si leur raison q vérifiait $|q| < 1$. De ce résultat, on peut déduire la convergence d'autre séries.

Théorème 3. *Les séries*

$$\sum_{n\geq 0} q^n, \ \sum_{n\geq 1} nq^{n-1}, \quad et \quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$

sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$*. Dans ce cas,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad et \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque 4.

(1) On peut remarquer qu'on obtient la somme de la série géométrique dérivée en dérivant par rapport à q la somme de la série géométrique et la somme de la série géométrique dérivée deux fois en dérivant deux fois par rapport à q la somme de la série géométrique. Cela permet de retrouver facilement les deux dernières formules connaissant la première.

(2) On ne donne des résultats que sur les deux premières dérivées car ce sont celles qu'on utilise le plus fréquemment, notamment pour les calculs d'espérance et de variance en probabilité. Mais le reste fonctionne de la même manière.

2.2 Série exponentielle

Théorème 4. *La série exponentielle* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge pour tout réel* x*. De plus, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

3 Techniques pour les calculs de somme

3.1 Décomposition $k^2 = k(k-1) + k$

✎ **Méthode.** Il est souvent utile pour faire apparaître des séries usuelles d'utiliser que

$$\boxed{k^2 = k(k-1) + k, \text{ ou que } k = (k-1) + 1.}$$

Exercice 7. Justifier la convergence et calculer les sommes suivantes

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{5^k}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 \,\mathrm{e}^{-k}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k^2 - 3k + 1}{k!}$

Remarque 5. Plus généralement, il est utile de décomposer k^n sous la forme

$$k^n = a_0 + a_1 k + a_2 k(k-1) + a_3 k(k-1)(k-2) + ... + a_n k(k-1)\cdots(k-n+1).$$

3.2 Télescopage(s)

On a déjà rencontré des sommes dites télescopiques dans la manipulation du symbole Σ. On peut reformuler les résultats déjà observés sous la forme de la proposition qui suit. En particulier, on pourra recourir à l'étude de la *série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ dans le but d'étudier la *suite* (u_n).

Proposition 3. Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente. Auquel cas, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.}$$

Exercice 8.

(1) Soient (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(2) Mêmes questions avec (v_n) définie par la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + n^2 e^{-n}$.

Exercice 9. Soient f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]0;1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2.$$

(1) Dresser le tableau de variations de f.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0;1[$.
(3) Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
(4) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

4 Autres exercices

Exercice 10. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :

1) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ 3) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n}$, 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$, 7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{3^n}$, 8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$,

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ 10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ 11) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$ 12) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$

13) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3n+2^n}{4^n}$ 14) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{n^2+1}{3^n}$.

Exercice 11. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dont on note (T_n) la suite des sommes partielles.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

(2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq T_n \leq 2\sqrt{n}.$$

(3) La série initiale est-elle convergente ?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

(1) Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$.
(2) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(3) Pour tout entier n, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}.$$

(4) En déduire la nature la série $\sum u_n$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x \ln|x||$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(1) Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative.
(2) Montrer qu'il existe un unique réel $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) = 1$.
(3) Pour quelles valeurs de x la série de terme général $u_n = (f(x))^n$ converge-t-elle ? En donner alors la somme.

Exercice 14. On veut établir la convergence et la somme de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad (n \geq 2).$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.

(1) Vérifier que $S_{2n+1} = \sum (u_{2k} + u_{2k+1})$.
(2) En déduire une expression simple de S_{2n+1}.
(3) En déduire l'étude de la suite (S_{2n}).
(4) Conclure sur la série de terme général u_n.

Exercice 15. On considère la suite définie par : $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

(1) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
(2) Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
(3) Prouver que la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
(4) En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
On définit la suite u par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)}$.

(1) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.
(2) Montrer que la suite u est strictement positive et strictement décroissante.
(3) En déduire que u est convergente et donner sa limite.
On pose pour tout entier n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
(4) Montrer que v_n est strictement négatif.
(5) Montrer que la suite (v_n) est convergente de limite nulle.
(6) Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$ et déterminer la nature de la série correspondante.
(7) (a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $-1/2 \leq v_n < 0$.
(b) Montrer que, pour tout $x \in [-1/2; 0]$, $2x \leq \ln(1 + x)$.
(c) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
(8) Montrer que

$$\forall x \in [0;1], \quad -x^2 \leq \frac{2}{e^x + e^{-x}} - 1 \leq -\frac{x^2}{4}.$$

(9) En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
(10) Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 17. (Inspiré de **ISC 1991**, extrait du DS 4 Printemps 2016)

On considère la série de terme général $a_n = \frac{n-1}{n^3+1}$ (pour $n \geq 1$) et on note (A_n) la suite de ses sommes partielles.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(2) En déduire que la série est convergente. On note A sa somme.
(3) Pour $1 \leq n < N$, on pose $R_{n,N} = \sum_{k=n}^{N} a_k$. Donner un majorant de $R_{n,N}$ dépendant de n et N puis, en faisant tendre $N \to +\infty$, montrer que

$$A - A_n \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 18. (D'après **EDHEC 1997**)

Soit p un entier naturel fixé. On considère la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

(1) Montrer que si $p=0$ ou si $p=1$, alors $\sum u_n$ diverge.

(2) Dans toute la suite, on suppose donc que $p \geq 2$. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série.

  (a) Montrer que, pour tout entier n, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

  (b) En déduire, par récurrence sur $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{1-p}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right).$$

  (c) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = (n+p)u_n$ est décroissante et minorée par 0. En déduire qu'elle converge vers une limite qu'on notera ℓ, vérifiant $\ell \geq 0$.

  (d) Montrer que $\sum u_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de p et ℓ.

  (e) On suppose que $\ell \neq 0$. Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ell} \times u_n = 1.$$

  En déduire qu'il existe un rang N à partir duquel $u_n \geq \ell/2n$, $n \geq N$.

  (f) Conclure, par l'absurde à la valeur de la somme de $\sum u_n$.

Exercice 19. (D'après **EML 2015**)

Dans cet exercice, on pourra utiliser que $2 < e < 3$.

(1) **Étude d'une fonction**

  On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2e^x - 1$.

  (a) Dresser le tableau de variations de ϕ, en précisant les limites en $\pm\infty$ et sa valeur en 0.

  (b) Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, notée α, et que $1/2 < \alpha < 1$.

(2) **Étude d'une suite**

  On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

  (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

  (b) Établir que la suite (u_n) est croissante.

  (c) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini?

(3) **Étude d'une série**

  (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note S sa somme.

  (b) Monter que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

  (On pourra commencer par minorer $f(n)$ par e^n.)

  (c) En déduire l'écriture d'un script sous `SciLab` permettant de calculer une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 20. (Extrait de DM 16, Printemps 2016.) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
(2) Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
(3) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & f^{-1}(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

est bien définie (*i.e.* que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0;1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x \geq 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(5) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.
   (b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,
$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$
   (c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.
   (d) Montrer finalement que
$$\lim_{n \to +\infty} 2^n e^L u_n = 1.$$

La dernière question permet d'expliciter un ***équivalent*** *de la suite u_n. C'est à dire que, à l'infini, on sait comment se comporte u_n:*
$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}.$$

5 Appendice: Calcul Différentiel, Séries numériques - D'après HEC 2004

Cet exercice traite de la difficulté d'intervertir les limites. En effet, une somme infinie étant une limite, on ne peut pas directement dériver sous le signe Σ.

On considère une suite de nombres positifs (a_n) tels que la série $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

(1) Soit $x \in [0;1]$. Montrer que la série de terme général $a_n x^n$ est absolument convergente puis qu'elle converge.
(2) On désigne par f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que
$$f(1) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n).$$
(3) En déduire que, pour tout $x \in [0;1[$,
$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x - k \right).$$

☞ Dans toute la suite, on suppose que f est dérivable en 1.

(4) Déduire de la question précédente que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0;1[$ puis que, pour tout $x \in [0;1[$, on a
$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1).$$

(5) Soit $N \geq 1$ un entier. Justifier que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$ est continue sur $[0;1]$ et que
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \sum_{n=1}^{N} n a_n.$$

(6) Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$,
$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

(7) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier $N \geq 1$, on a
$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1).$$

(8) En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

(9) Utiliser la question précédente et la Question 3 pour montrer que, pour tout $x \in [0;1[$,
$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1).$$

(10) En déduire que
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = f'(1).$$