ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 14. Variables aléatoires réelles I - V.A. Finies

Ce premier chapitre sur les variables aléatoires présente, en plus des généralités sur les v.a.r, les outils principaux relatifs aux variables aléatoires finies. Un chapitre ultérieur traitera des variables aléatoires discrètes puis un dernier des variables aléatoires continues.

1 Généralités sur les variables aléatoires réelles

1.1 Variable aléatoire réelle

Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience, mais par une certaine *fonction* de ce résultat.

Exemple.

(1) Lors d'un lancer de deux dés, on peut ne s'intéresser uniquement qu'à la somme des résultats des deux dés:
$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^2;$$
(2) On peut s'intéresser au nombre de garçons dans une famille qui comporte 4 enfants:
$$\Omega_2 = \{F,G\}^4;$$
(3) On peut s'intéresser au gain lors de l'achat d'un ticket (prix: 1€) de tombola (un seul ticket sur les 100 tickets numérotés permet de remporter le gros lot - 20€ - et deux autres tickets font remporter 10€):
$$\Omega_3 = [\![1;100]\!];$$
(4) Lors d'une succession infinie de tirages à *Pile ou Face*, on peut vouloir compter le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *Pile*:
$$\Omega_4 = \{P,F\}^{\mathbb{N}^\star}.$$

Une **variable aléatoire** va alors associer au résultat de l'expérience aléatoire une **valeur numérique**. La façon dont cette variable décrit l'expérience définit explicitement cette variable.

Définition 1 (Variables aléatoires).
Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle ***variable aléatoire réelle*** *(ou v.a.r) sur $(\Omega,\mathcal{A})$ toute application*
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}.$$

☞ Si la condition précédente est nécessaire à la définition d'une v.a.r ($\mathcal{A}$ représente tous les évènements qu'on peut "mesurer"), on ne demandera jamais, en pratique, de la vérifier.

☞ **Notations.** Si X est une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

- On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable X.
- Si $I \subset \mathbb{R}$,
$$(X \in I) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega; X(w) \in I\}.$$
- Si $a \in \mathbb{R}$,
$$(X = a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = a\};$$
$$(X \leqslant a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leqslant a\}.$$

Exercice 1. Pour chaque variable aléatoire implicitement définie dans le tout premier exemple ci-dessus, expliciter $X(\Omega_i)$.

Exercice 2. On tire, avec remise, huit fois consécutives une boule dans une urne qui en contient trois rouges et deux blanches. On note X la v.a.r comptant le nombre de boules blanches obtenues. Traduire en français les évènements suivants:

$$(X = 3), \qquad (X < 5), \qquad (X \geq 3) \cap (X < 7), \qquad (X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6) \cup (X = 8).$$

Remarque 1. Lorsque Ω est **fini**, par exemple $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, au plus n. Ainsi,

$$\mathrm{Card}(X(\Omega)) \leq \mathrm{Card}(\Omega).$$

Si on note alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ (avec $p \leq n$ donc), la *formule des probabilités totales* donne, pour tout évènement $B \subset \Omega$,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{p} P_{(X=x_k)}(B) P(X = x_k)$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Afin de donner une définition rigoureuse et générale de la notion de *loi* d'une variable aléatoire, on a besoin d'introduire la tribu de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}$, engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On verra ci-après quels sont les éléments clés à retenir pour nous.

Définition 2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A})$. *On appelle* ***loi*** *de* X *l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{B} & \longrightarrow & [0;1] \\ & A & \longmapsto & P(X \in A) \end{array}$$

L'application $\mathbb{P}_X$ associe donc à une partie de $\mathbb{R}$ la probabilité que X y prenne ses valeurs.

☞ La loi d'une variable aléatoire est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

☞ **En pratique**, dans le cas d'un univers Ω discret (fini ou infini), la loi d'une variable aléatoire sera la donnée de tous les couples

$$(x_i, P(X = x_i)), \qquad x_i \in X(\Omega).$$

☞ La loi sera la principale information dont on disposera sur une variable aléatoire, l'univers Ω pouvant être inconnu ou implicite.

Exercice 3. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. Un as rapporte 4 points, un roi 3 points, une dame 2 points, un valet 1 point et les autres cartes ne rapportent aucun point. On définit la variable aléatoire X correspondant au nombre de points obtenus. Expliciter la loi de X.

Exercice 4. Une urne contient 8 boules rouges et 5 boules blanches; on effectue des tirages au hasard et sans remise d'une boule. X est le rang d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de X.

Exercice 5. On jette une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir *Pile* vaut $0,3$ une infinité de fois et on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *Pile*. Déterminer la loi de X.

1.3 Fonction de répartition

Définition 3. *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction*

$$\begin{array}{rrcl} F_X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ & x & \longmapsto & P(X \leq x). \end{array}$$

☞ La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire, c'est à dire qu'elle contient toute l'information caractérisant la loi de la v.a.

Proposition 1. (Propriétés de la fonction de répartition)
Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction de répartition F_X. Alors,

(i) F_X est croissante;

(ii)
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1;$$

(iii) F_X est continue à droite en tout point;

(iv) Si $a \leq b$, alors
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Exercice 6. On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés. On note X la v.a. correspondant à la somme des résultats obtenus et Y celle correspondant au maximum.

(1) Déterminer les lois des deux variables aléatoires X et Y.

(2) Représenter les fonctions de répartition F_X et F_Y.

2 Variables aléatoires finies

Dans toute la suite, on va s'intéresser au cas où l'univers $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est fini. Ainsi, $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_p\}$ le sera également.

En particulier, il est important de garder à l'esprit que

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

On constate alors qu'on a une formule très simple pour la fonction de répartition de X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} P(X = x_i).$$

On a également déjà mentionné que, dans ce cas, la loi d'une v.a. est caractérisée par l'ensemble de tous les couples $(x_i, P(X = x_i)$ pour $i = 1, ..., p$. Choisissant de numéroter les x_i par ordre croissant, et observant que

$$(X = x_i) = (x_{i-1} < X \leq x_i),$$

on constate qu'on a la relation suivante **très importante**

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X = x_i)$$

ce qui confirme bien que toute l'information de la loi est portée par la fonction de répartition.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X, Y deux V.A.R telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \ldots, 2n\}$ et

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2n\}, \qquad P(X > k) = 1 - \frac{k}{2n}, \qquad P(Y > k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{2n}, & \text{si } k \text{ est pair} \\[2ex] 1 - \dfrac{k - \frac{1}{2}}{2n}, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer les lois de probabilités de X et de Y.

Exercice 8. On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $F_S(k)$ puis donner la loi de S.

2.1 Espérance. Variance

Définition 4. *Soit X une V.A.R de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On appelle* ***espérance mathématique*** *(ou moyenne) de X le nombre réel*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Exercice 9. On lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de *Face* obtenus et soit Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 si deux côtés identiques apparaissent successivement et 0 sinon.
Déterminer les loi de X et Y puis leurs espérances.

Exercice 10. Soit X une V.A.R telle que $X(\Omega) = [\![2; n]\!]$ et pour tout k,

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \binom{n-1}{k-1}.$$

Vérifier que X définit bien une variable aléatoire et calculer $E(X)$.

Proposition 2. (Propriétés de l'espérance)

(1) S' il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

(2) **Positivité** - Soit X une V.A.R. positive c'est à dire, $X(\Omega) \subset [0; +\infty[$, alors $E(X) \geqslant 0$.

(3) **Linéarité de l'espérance**. Soient X, Y deux V.A.R sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$ $\qquad$ (ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Exercice 11. On reprend les notations de l'Exercice 6 et on définit alors le gain algébrique du joueur comme le double de la différence entre la somme des deux dés lancés et 4. Pour chaque tirage, on note Y le gain algébrique du joueur.
Exprimer Y en fonction de X puis calculer $E(Y)$.

Définition 5. *(Variable centrée)*

(1) Une V.A.R finie X est dite ***centrée*** *si $E(X) = 0$.*
(2) Soit X une V.A.R finie. La variable $Y = X - E(X)$ est appelée variable aléatoire centrée associée à X.

Définition 6. *Soit X une V.A.R de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On appelle*

- ***Moment d'ordre*** *2 le nombre réel $E(X^2)$;*
- ***Variance*** *de X le nombre réel*

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = E\left([X - E(X)]^2\right);$$

- ***Écart-type*** *de X le nombre réel*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

☞ La variance représente la moyenne quadratique des écarts à la moyenne. La variance et l'écart-type sont des paramètres de dispersion; plus ils sont grands, plus la variable aléatoire est dispersée autour de sa moyenne.

Remarque 2. Pour les V.A.R finie le problème d'existence de ces quantités ne se pose pas (les sommes sont finies, il n'y a pas de problème de convergence). Cependant, on verra dans le cas de V.A.R discrètes infinies que l'espérance, le moment d'ordre 2 ou la variance d'une variable aléatoire n'existent pas nécessairement.

Proposition 3. Soit X une V.A.R finie. Alors,

- On peut calculer la variance à l'aide de la formule de *Kœnig-Huygens*

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2;$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Définition 7. *(Variable réduite)*

- *Une V.A.R finie X est dire **réduite** si $V(X) = 1$.*
- *Soit X une V.A.R finie. La variable $Y = \dfrac{X}{\sigma(X)}$ est appelée variable réduite associée à X.*

☞ La variable $X^\star = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.

2.2 Fonction d'une V.A.R finie

Soient X une V.A.R finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir la V.A.R. $f(X)$ par

$$\begin{array}{rccc} f(X): & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

☞ En particulier, notant $Y = f(X)$, on a

$$Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_i) : \ i = 1, ..., n\} = \{y_1, ..., y_q\}.$$

☞ De plus, on obtient la **loi** de $f(X)$ à partir de celle de X:

$$P(f(X) = y_i) = \sum_{k:\ f(x_k) = y_i} P(X = x_k).$$

Proposition 4. (Théorème de transfert)
Il n'est pas nécessaire de connaître la loi de $f(X)$ pour calculer son espérance; il suffit de connaître celle de X:

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i).$$

Exercice 12. On lance successivement deux dés (cubiques, équilibrés) et on note X la différence des résultats obtenus et $Y = |X|$. Déterminer $E(Y)$ de deux manières différentes.

3 Lois finies usuelles

3.1 Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme sur** $\llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui se note parfois $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Exemple. Si X désigne le score obtenu en lançant un dé équilibré, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

Proposition 5. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $E(X) = \frac{1+n}{2}$ (" la moyenne des extrémités").

3.2 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $p \in [0; 1]$), ce qu'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si

$$P(X = 1) = p.$$

☞ On a alors nécessairement $P(X = 0) = 1 - p$.

La loi de Bernoulli intervient à chaque fois qu'il est question d'expérience aléatoire à deux alternatives possibles (souvent appelées succès et échec).

Exemple. On tire une boule dans une urne qui contient des boules blanches et des boules noires. On suppose que la proportion de boules blanches par rapport au nombre total de boules est p. On définit la variable aléatoire X comme étant égale à 1 si la boule tirée est blanche et égale à 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Proposition 6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

3.3 Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p, ce qu'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et si

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Exercice 13. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli de paramètre p (disons que p est la probabilité d'un succès), alors le *nombre de succès* suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple.

- Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches par rapport au total est notée p. On tire n fois une boule, en la remettant dans l'urne à chaque fois. On note X le nombre total de boules blanches tirées. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
- On lance quatre dés équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 1/6)$.

Proposition 7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Remarque 3. On constate qu'il suffit de multiplier par n l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli pour obtenir celles de la loi binomiale correspondante.

Exercice 14. Un voyageur un peu inquiet à l'idée de prendre l'avion se renseigne sur le type d'aéronef effectuant le vol nécessaire à son voyage. Deux types d'avions effectuent la liaison, ils ont respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion devrait choisir le voyageur?

4 Autres exercices

Exercice 15. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et celle de Y. (On pourra utiliser les fonctions de répartition de chacune des deux v.a.).

Exercice 16. (Test à l'embauche)

Une entreprise souhaite recruter un cadre. Un total de n personnes se présentent pour le poste. Chacune passe, à tout de rôle, un test dont la probabilité de réussite est p (avec $p \in]0;1[$). La première personne à réussir le test est engagée. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si la $k-$ième personne à passer le test est engagée et $n+1$ si personne ne réussit le test.

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Calculer, pour tout $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

(3) En déduire l'espérance $E(X)$.
(4) Quelle est la valeur minimale de p à choisir pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats?

Exercice 17. (D'après **ECRICOME 2010**) Une partie d'un jeu se déroule comme suit. On lance deux dés; si les scores des deux dés sont les mêmes, on marque deux points, si le score du premier est strictement supérieur à celui du second, on marque un point, sinon on ne marque aucun point. On répète n partie du même jeu (de manière indépendante). On note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre de points marqués à la partie i et T_i le total du score après i parties.

(1) Déterminer la loi de chaque X_i ainsi que leur espérance.
(2) Exprimer T_i en fonction des X_j. En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points?
(3) Déterminer la loi de T_1.
(4) Déterminer la loi de T_2.
(5) On cherche à déterminer la loi de T_3.
  (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par T_3.
  (b) Pour $j \in T_2(\Omega)$ et $k \in T_3(\Omega)$, déterminer $P((T_3 = k) \cap (T_2 = j))$.
  (c) En déduire la loi de T_3.

Exercice 18. (D'après **ECRICOME 2016**)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. On dit que X et Y sont *échangeables* si, pour tous entiers $i, j \in \{1, ..., N\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

(1) Montrer que si X et Y sont échangeables, alors elles suivent la même loi.
(2) On dit que X et Y sont *indépendantes* si, pour tous $i, j \in \{1, ..., N\}$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j).$$

Montrer que si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.

(3) L'exemple suivant vise à montrer que la réciproque est fausse. Soient n, b, c trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On pioche une boule dans l'urne. On définit une première variable aléatoire X comme suit. Si la boule est est noire, alors $X = 1$ sinon $X = 2$.
  (a) Écrire en langage `SciLab`, une fonction `tirage(n,b)` simulant la variable X.

(b) Déterminer la loi de X.

On remet la boule tirée dans l'urne ainsi que c boules supplémentaires de la couleur tirée. On tire une seconde boule et on introduit la variable aléatoire Y qui vaut 1 si la nouvelle boule tirée est noire et 2 sinon.

(c) Déterminer la loi de Y.
(d) Montrer que X et Y sont échangeables.
(e) Sont-elles indépendantes?

Exercice 19. (D'après **ESLSCA 1993**)

Soit N un entier $N \geq 3$. Un jeu vidéo comporte N phases de jeu appelées *niveaux*. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau.

Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux.
On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$), la probabilité de réussir ce $k-$ième niveau est égale $1/k$.
On désigne par X_N la variable aléatoire suivante:

"Nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête".
Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

(1) Montrer que, pour $k \in [\![1; N-1]\!]$
$$P\left(X_N = k\right) = \frac{k}{(k+1)!}$$
et que
$$P\left(X_N = N\right) = \frac{1}{N!}.$$
(2) Calculer $E\left(X_N + 1\right)$. En déduire que $E\left(X_N\right) = S_N - 1$ avec
$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$
puis déterminer
$$\lim_{N \to +\infty} E\left(X_N\right).$$
(3) Exprimer
$$E\left[\left(X_N + 1\right)\left(X_N - 1\right)\right]$$
à l'aide de S_{N-3}.
(4) En déduire $V\left(X_N\right)$ en fonction de S_N,S_{N-3} et N. Montrer que
$$\lim_{N \to +\infty} V\left(X_N\right) = 3e - e^2.$$

Exercice 20. (D'après **EDHEC 2004**)
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun *Pile* pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

(1) (a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z\left(\Omega\right)$.

(b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $P(Z=k)$. On distinguera les cas $k=0$ et $k\geq 1$.
(c) Vérifier que $\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z=k)=1$.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\ U_1,\dots,U_n$ telles que pour tout k de $\{0,1,...,n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante: si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k\geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

(2) Déterminer $X(\Omega)$.
(3) (a) Déterminer, en distinguant les cas $i=0$ et $1\leq i\leq n$, la probabilité $P_{Z=0}(X=i)$.
(b) Déterminer, en distinguant les cas $i=n$ et $0\leq i\leq n-1$, la probabilité $P_{Z=n}(X=i)$.
(c) Pour tout k de $\{1,2,...,n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0\leq\ i\leq\ k$ et $k<i\leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{Z=k}(X=i)$..
(4) (a) Montrer que $P(X=0)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\frac{1}{2^n}$.
(b) Montrer que $P(X=n)=\frac{1}{2^n}$.
(c) Exprimer, pour tout i de $\{1,2,...,n-1\}$, $P(X=i)$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
(5) Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n} P(X=i)=1$.

Exercice 21. (D'après **EDHEC 2005**)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0<p<1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0=0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.

(1) Donner la loi de X_1.
(2) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega)=[\![0;n]\!]$.
(b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n-1}$ pour montrer que $\mathrm{P}(X_n=0)=1-p$.
(3) (a) Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2,\dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)$.
(b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\{0,1,2\dots,n-1\},\ \mathrm{P}(X_n=k)=p^k(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n=n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
(c) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k)=1.$$

(4) (a) Montrer que , pour tout $n\geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1}=\frac{(n-1)\,p^n-n\,p^{n-1}+1}{(1-p)^2}.$$

(b) En déduire que
$$E(X) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}.$$

(5) (a) Montrer, en utilisant la question $(3a)$, que, pour tout entier n,
$$E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right).$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose
$$u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}.$$
Montrer que
$$u_{n+1} = p\,u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.$$

(c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

(d) Montrer enfin que
$$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right).$$

Exercice 22. (Étude d'une suite de variables aléatoires, Extrait de DM n°18, Printemps 2016).

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ (où $p \in [0;1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que
$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

(2) On considère maintenant une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\left\{0; \frac{1}{n}; ...; \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que, pour tout $l \in [\![0; n-1]\!]$,
$$P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n},$$
et une seconde suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement:
$$\text{Sachant que } \left(U_n = \frac{k}{n}\right), \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right).$$

(a) Donner la loi de X_1.

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que, pour tout $i \in [\![0; m]\!]$,
$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que
$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$
(On citera le théorème utilisé en justification.)

(6) En déduire que

$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

puis que

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

Exercice 23. (Extrait DM n°19, Printemps 2016) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. (On peut appeler X_N le "nombre de changements" au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement *Pile* , *Pile* , *Face* , *Pile* , *Face* , *Face* , *Face* , *Pile* , *Pile*, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

(1) Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, \cdots, N-1]\!]$.
(2) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
(3) Montrer que

$$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

et que

$$P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}.$$

(4) (a) Justifier que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

(c) En sommant cette relation de $k=0$ à $N-1$, montrer que

$$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$

(d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(e) En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.

Exercice 24. (D'après **ECRICOME 2016, voie S**, Extrait Concours Blanc Juin 2016)
Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement "on pioche une boule rouge au n-ième tirage".

(1) Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

(2) On souhaite simuler l'expérience grâce à `SciLab`.

(a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

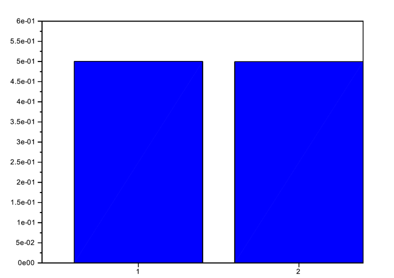
```
function res=tirage(x,y)
    r=rand();
    if ............... then
        res=0;
    else
        res=1;
    end
endfunction
```

(b) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

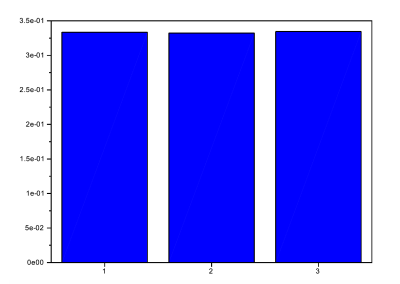
```
function Xn=experience(a,b,n)
    x=a;
    y=b;
    for k=1:n
        r=tirage(x,y);
        if r==0 then
            x=............
        else
            ..............
        end
    end
    Xn=...................
endfunction
```

(3) On écrit une fonction `simulation(a,b,n,m)` qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie est un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $\dots$, $P(X_n = n)$. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 4 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en "bâtons". On saisit successivement dans la console les instructions suivantes dont les figures correspondantes apparaissent ci-dessous.

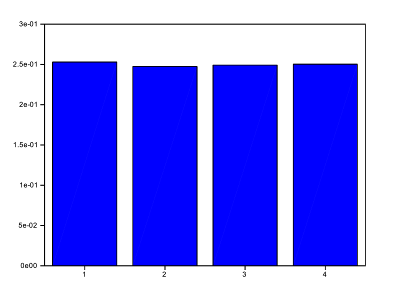
```
--> bar(simulation(1,1,1,100000))
```



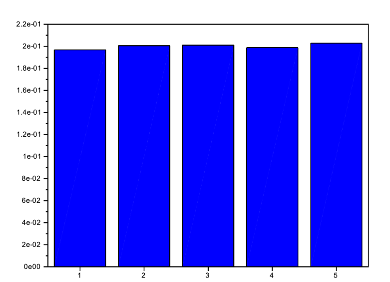
```
--> bar(simulation(1,1,2,100000))
```



```
--> bar(simulation(1,1,3,100000))
```



```
--> bar(simulation(1,1,4,100000))
```



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}.$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au (3a).
(On pourra utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(X_n = k)\}$ et la question précédente.)