ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 16. Fonctions réelles d'une variable réelle III - Calcul intégral (sur un segment)

Ce chapitre est la première partie d'un dyptique consacré au calcul des intégrales, qui apparaissent dans divers problèmes que nous pourrons rencontrer comme le calcul de l'aire d'une surface du plan ou la modélisation d'une expérience aléatoire par une loi de probabilité à densité. La notion d'intégrale d'une fonction est liée à celle de *primitive*, que nous rappelons, en fournissant un formulaire, en préambule du chapitre.

1 Préliminaires: rappels sur les primitives

Définition 1. *On dit que la fonction F est une* ***primitive*** *de la fonction f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si, pour tout $x \in I$,*

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple.

(1) La fonction $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x$ est un primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
(2) La fonction logarithme népérien $F : x \mapsto \ln x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
(3) La fonction $F : x \mapsto e^x + 5x - 7$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 (Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle)**.**
Toute fonction f ***continue*** *sur un intervalle I possède au moins une primitive F sur I.*

☞ Ce théorème peut-être prolongé. En effet, il est également possible de montrer que toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I, admet au moins une primitive.

Proposition 1 (Primitives d'une fonction continue sur I)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme
$$x \mapsto F(x) + k \qquad \text{où} \qquad k \in \mathbb{R}.$$
- Soient a et b deux nombres réels. Alors, il existe une unique primitive F de f telle que $F(a) = b$.

Pour dresser un formulaire des primitives des fonctions usuelles, il suffit de prendre le catalogue des dérivées et de le lire à l'envers. Dans le tableau suivant, c désigne une constante arbitraire (appelée **constante d'intégration**).

Fonction	Sur l'intervalle	Primitives
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x + c$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + c$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + c$

☞ Bien sûr, si on a besoin d'une seule primitive, on peut choisir arbitrairement la constante d'intégration c. En général on choisit $c = 0$, pour simplifier les calculs.

Exercice 1. Déterminer une fonction G, définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, telle que, $G(1) = 3$, $G(-2) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Proposition 2. Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F_1, F_2 deux primitives de f sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$, $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$.

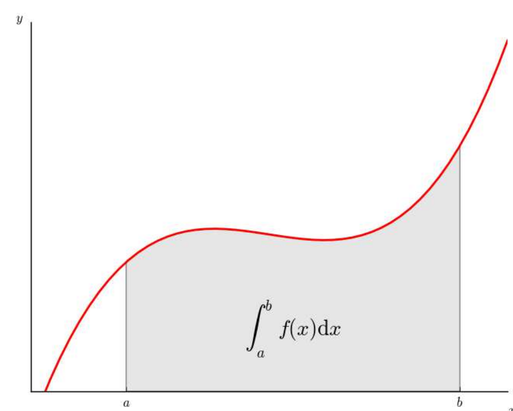
2 Intégrale sur un segment - Généralités

2.1 Intégrale d'une fonction positive - Aire sous la courbe

Définition 2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive (i.e. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$). Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On définit l'**intégrale** de f entre a et b, que l'on note*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

comme l'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.



Remarque 1. Dans l'expression qui définit l'intégrale, x est une variable *muette*. Cela signifie qu'on peut la remplacer sans aucun problème par une autre lettre. On peut écrire par exemple

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $a > b$, on donne un sens à l'intégrale en posant

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ La définition de l'intégrale assure notamment que $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Si f est continue mais pas nécessairement positive, on peut alors l'écrire comme différence de deux fonctions positives (correspondant aux parties positives et négatives de la fonction)

$$f = f^+ - f^-$$

et l'intégrale de f est alors la différence des intégrales de f^+ et f^-. Il découle immédiatement et simplement de cette définition de l'intégrale des propriétés cruciales.

Proposition 3 (Relation de Chasles)**.** Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a, b, c \in I$. Alors,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si la définition est simple à comprendre, le calcul explicite de l'intégrale paraît cependant compliqué. Néanmoins, on observe facilement le fait suivant dont la généralisation permet de calculer l'intégrale à partir d'une primitive.

Proposition 4. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, monotone et positive. Alors, la fonction F définie sur $[a; b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $]a, b[$ et, pour tout $x \in]a, b[$, $F'(x) = f(x)$.

La preuve, faite en classe, est très instructive et utilise un encadrement de l'intégrale par l'aire de rectangles et la continuité de f. Ce résultat se généralise à toute fonction continue, mais la preuve est ici admise.

2.2 Intégrale d'une fonction continue et primitives

Théorème 2. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur I. Alors, pour $a, b \in I$, on peut calculer l'intégrale entre a et b*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

☞ La Proposition 2 assure que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive.

Remarque 2. Il est fréquent d'utiliser la notation suivante. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, on note $[g]_a^b = g(b) - g(a)$. Ainsi, on peut écrire le calcul de l'intégrale sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes

$$(i) \int_0^1 x\mathrm{d}x, \qquad (ii) \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}, \qquad (iii) \int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que g est la primitive de f qui s'annule en a.

2.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition 5 (Linéarité de l'intégrale)**.** Soient I un intervalle, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ La linéarité de l'intégrale permet notamment de calculer les intégrales de fonctions obtenus par combinaisons linéaires de fonctions usuelles dont on sait déterminer des primitives.

Exercice 4. Calculer

$$\int_{-1}^1 \left(-x^6 + 2x^5 + 8x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x.$$

Proposition 6 (Positivité de l'intégrale)**.** Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive (*i.e.* pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$). Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$$

On en déduit immédiatement les corollaires très utiles suivants.

Corollaire 1. Soient I un intervalle et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 2. Soient I un intervalle et $f\, I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\left(\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 0\right) \iff (\forall x \in [a;b], \quad f(x) = 0)\,.$$

Exercice 5. (Une preuve d'une limite usuelle)

(1) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, x]$,

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

(2) En intégrant par rapport à t entre 0 et x l'inégalité précédente, montrer que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

(3) Retrouver alors un résultat bien connu.

Exercice 6. (Séries de Riemann)

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $\alpha > 0$ différent de 1,

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

(2) Démontrer le critère de convergence des séries de Riemann, énoncé dans un chapitre précédent.

On a déjà vu qu'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ était bornée (et atteignait ses bornes). Cette remarque, combinée à la positivité de l'intégrale, nous permet d'établir le résultat capital suivant, très utilisé dans les exercices.

Proposition 7. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leq (b-a)\max_{t\in[a;b]}|f(t)|.$$

Exercice 7. (D'après **EML 1993**)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n\mathrm{d}x.$$

(1) Déterminer les variations de la fonction $x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $[0;1]$.
(2) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(3) En déduire la limite de la suite (J_n).

2.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux de façon évidente; on calcule l'intégrale sur chaque "morceau" où la fonction est continue, puis on fait la somme.

Exemple. On définit une fonction f sur $[0,1]$ en posant $f(x)=x$ si $x\in[0,1]$ et $f(x)=-x$ si $x\in[1,2]$. Alors f est continue par morceaux sur $[0,2]$ et:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 -x\,\mathrm{d}x\\ &= -1.\end{aligned}$$

3 Méthodes de calcul d'intégrales

Si on peut parfois facilement trouver une primitive de la fonction que l'on cherche à intégrer à l'aide de combinaisons de fonctions élémentaires, ce n'est pas toujours le cas (et c'est parfois même impossible - la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ par exemple). Ainsi, on présente ici quelques techniques de calcul pour les fonctions qui ne paraissent pas, de prime abord, triviales à intégrer.

3.1 Reconnaître une dérivée

On sait que si u est une fonction dérivable, la dérivée de $\ln(u)$ (sous réserve que $\ln(u)$ ait un sens) est $\frac{u'}{u}$. On sait aussi que la dérivée de e^u est $u'e^u$. Et on sait que la dérivée de u^a (ù a est une constante) est, sous réserve que u^a ait un sens, au^{a-1}. On peut présenter ces résultats "à l'envers" pour obtenir le tableau suivant

Fonction	Primitives	Remarques
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	on suppose que u est à valeurs >0
$u'e^u$	e^u+c	
$u'u^a$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}+c$	on suppose que u est à valeurs >0 et que $a\neq-1$

Exercice 8. Calculer les intégrales

$$(i)\ \int_0^1 2x(x^2+1)^4 \mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_e^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}, \qquad (iii)\ \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x;$$

$$(iv)\ \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x+1}\mathrm{d}x; \qquad (v)\ \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t; \qquad (vi)\ \int_2^3 \frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

3.2 Intégration par parties

Proposition 8 (Formule d'intégration par parties)**.** Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ On pourra retenir la formule d'intégration par parties sous la forme abrégée

$$\int uv' = [uv] - \int u'v.$$

Ainsi, l'intégration par partie ramène l'intégration de uv' à celle de $u'v$.

Exemple. A priori, il n'est pas évident de calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$. Une intégration par parties permet de le faire. Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a donc $u'(x) = 1$ et on convient que $v(x) = e^x$. Par intégration par parties

$$\int_0^t xe^x\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x\mathrm{d}x = te^t - [e^x]_0^t = te^t - e^t + 1.$$

Ainsi, la primitive de $x \mapsto xe^x$ qui s'annule en 0 est $t \mapsto te^t - e^t + 1$ (on peut d'ailleurs le vérifier facilement a posteriori).

Exercice 9. (IPP, niveau 1)

(1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_1^e x\ln(x)\mathrm{d}x.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de ln qui s'annule en 1.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une ou plusieurs IPP successives, calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_1^e t^n\ln(t)\mathrm{d}t, \quad (ii)\ \int_0^1 (x^2+x)e^x\mathrm{d}x, \quad (iii)\ \int_1^e t^n(\ln t)^2\mathrm{d}t.$$

3.3 Changement de variable

Proposition 9 (Formule de changement de variable)**.** Soient ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et f une fonction continue sur l'intervalle $\phi(I)$. Soient a et b deux éléments de I. Alors,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur $\phi(I)$ (dont l'assurance est garantie car f est continue). La fonction $F\circ\phi$ est alors dérivable, comme composée de telles fonctions, et on a $(F\circ\phi)' = (F'\circ\phi)\phi'$. Ainsi,

$$\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\phi)'(t)\mathrm{d}t = F(\phi(a)) - F(\phi(b)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

□

✎ **Méthode.** En pratique, quand on fait un changement de variable pour calculer une intégrale du type

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

on commence par écrire "posons $t = u(x)$". Ensuite, on utilise la formule mnémotechnique

$$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Enfin, on ajuste les bornes d'intégration en remarquant que si x parcourt l'intervalle $[a, b]$, alors $t = u(x)$ parcourt l'intervalle $[u(a), u(b)]$.

Exemple. Calculons

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

On pose $t = x + 1$. On a donc $\mathrm{d}t = 1 \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$. Donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Puisque x parcourt l'intervalle $[0, 1]$, $t = x + 1$ parcourt $[1, 2]$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln t]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Exercice 11. Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t+1},\quad (ii)\ \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\quad (iii)\ \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,\quad (iv)\ \int_1^x \frac{\ln(t)^n}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[-a, a]$.

(1) Démontrer que si f est impaire, son intégrale entre $-a$ et a est nulle;
(2) Démontrer que si f est paire, son intégrale entre $-a$ et a vaut le double de son intégrale entre 0 et a.

4 Fonctions définies par une intégrale

On a observé que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ était **la** primitive de f s'annulant en a. on peut formuler ce résultat "à l'envers".

Corollaire 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue (I étant un intervalle). Soit $a \in I$.
On pose, pour tout $x \in I$,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors g est dérivable et, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = f(x).$$

Exemple. Posons, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \int_1^x (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Alors, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$

$$g'(x) = (\ln x)^2.$$

On en déduit par exemple que g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut s'intéresser à des fonctions qui semblent plus compliquées, comme par exemple

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \exp(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction f est évidemment définie sur $\mathbb{R}$. On ne va pas en faire l'étude détaillée mais on va expliquer comment on peut montrer que f est dérivable et comment on peut calculer $f'(x)$. On commence par écrire, en utilisant la relation de Chasles.

$$f(x) = \int_x^0 \exp(t^2)\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} \exp(t^2)\mathrm{d}t = -\int_0^x \exp(t^2)\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} \exp(t^2)\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$f(x) = -g(x) + h(x),$$

où

$$g(x) = \int_0^x \exp(t^2)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^{x^2} \exp(t^2)\mathrm{d}t.$$

Pour dériver la fonction f, il suffit de dériver les fonctions g et h. Or pour la fonction g, c'est évident, vu ce qui a été dit plus haut

$$g'(x) = \exp(x^2).$$

Pour la fonction h, on remarque que c'est une fonction composée car

$$h(x) = g(x^2).$$

On peut donc dériver h en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées

$$f'(x) = -\exp(x^2) + 2x\exp(x^4).$$

Il faudrait maintenant étudier la fonction définie par $f'(x)$. On peut voir (exercice) qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ (théorème de bijection) tel que $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$ et $f'(x) > 0$ si $x > \alpha$. Ainsi, on connait les variations de f sur $\mathbb{R}$....

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
f	$+\infty$	↘	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

Exercice 13. (D'après **EML 2004**)

On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_{-x}^{x} \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que G est impaire.
(2) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $G'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq t.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

(4) Dresser le tableau de variations complet de G.

5 Autres exercices

Exercice 14. (Divergence de la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$)

(1) Étudier les variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ et en déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n\ln(n)} \geq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}.$$

(2) Montrer que, pour tout entier $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \geq \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)).$$

(3) Conclure quant à la nature de la série.

Exercice 15. On pose, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t.$$

(1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la relation

$$I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(3) À l'aide d'un encadrement de l'intégrale I_n, montrer que $I_n \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.
(4) Déterminer alors la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exercice 16. (Somme de la série harmonique alternée)

On a déjà vu (dans le Devoir Maison n°6 notamment, mais aussi dans le Chapitre 11) que la série harmonique alternée était convergente. L'objectif de l'exercice est de déterminer la valeur de sa somme.

On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

(1) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

(2) Calculer I_0 et en déduire I_1.
(3) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
(4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(5) Conclure.

Exercice 17. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$

(1) Calculer I_1 puis montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}.$$

(3) En déduire la convergence de (J_n).
(4) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{-1} J_n = 1.$$

Exercice 18. (D'après **EDHEC 2011**)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = \frac{1}{2}$ et, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t+1} dt.$$

(1) (a) Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$\frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

(2) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x),$$

où g est une fonction que l'on déterminera.
(b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a

$$\frac{t}{e^t+1} \leq 1.$$

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 19. (D'après **ECRICOME 2005**)
On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx.$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

(1) Calculer I_0, I_1.

(2) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(3) Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
(4) Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
(5) Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
(6) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(7) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
(8) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n.$$

(9) En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
(10) Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\,I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
(11) Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 20. (Inspiré de **EDHEC 2008**) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

(1) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0; 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

Exercice 21. (D'après **ECRICOME 2004**, Extrait Concours Blanc Juin 2016)
Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal.

I - Étude de f.

(1) Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
(3) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
(4) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
(5) Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
(6) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
(7) Pour tout y de l'intervalle $]0,1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$ tel que :
$$f(x)=y.$$
(8) Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.

II - Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :
$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :
$$\lambda\leq x\leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0\leq y\leq f(x)$$
ainsi
$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) (a) Montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x+\sqrt{x^2+1}>0.$$
(b) En déduire l'ensemble de définition de F.
(2) Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
(4) Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.
(5) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III - Etude de la suite (u_n).

(1) Calculer u_0 et u_1.
(2) Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}=x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.)
(3) Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
(4) Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question.)
(5) Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leq x^n.$$
En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}.$$
(6) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 22. (D'après **ESSEC II 2017**) On rappelle qu'une fonction (numérique) sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle vérifie la prpriété suivante:

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0:1], \quad f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2).$$

On rappelle qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe. On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, continues et convexes sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0;1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

Enfin, on définit **l'indice de Gini** de l'application f, noté $I(f)$, en posant

$$I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t - f(t))\mathrm{d}t.$$

(1) (a) Donner une interprétation géométrique de la propriété de convexité.
  (b) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0;1]$ à l'aide de la dérivée f'.

(2) (a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0;1]$.
  (b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
  (c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions $t \mapsto t$ et f et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

(3) **Un premier exemple**
  Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0;1]$.
  (a) Montrer que f est élément de E.
  (b) Calculer $I(f)$.

(4) **Propriétés de l'indice de Gini**
  (a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geq 0$.
  (b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0;1]$.
  (c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.
  (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0;1]$ par $f_n(t) = t^n$.
    (i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.
    (ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f dans E tel que $I(f) > A$.

(5) **Minoration de l'indice de Gini**
  (a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0;1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0;1]} \tilde{f}(t)$.
  (b) Montrer que pour tout t de $[0;t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t}{t_0}$.
  (c) Montrer que pour tout t de $[t_0;1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t-1}{t_0-1}$.
  (d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.