ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 4. Systèmes linéaires

L'objectif de ce court chapitre est d'introduire et de résoudre des systèmes de n équations à p inconnues. La technique principale, appelée *méthode du Pivot de Gauss* est très importante et on s'en servira beaucoup, notamment dans le cadre de l'algèbre linéaire (et donc des matrices).

1 Vocabulaire. Introduction

Définition 1. *On appelle* ***système linéaire*** (S) *de* n *équations à* p *inconnues un système d'équations de la forme*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \quad (L_2) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \quad\quad (L_i) \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \quad (L_n) \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ *sont des nombres réels fixés appelés* ***coefficients du système*** *et les* $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ *sont des réels fixés qui constituent le* ***second membre*** *du système. Les* $x_1,\dots,x_p$ *sont les* p ***inconnues*** *du sytème.*

Par commodité, chaque équation est repérée par un nom : L_i *pour i-ème ligne.*

Une solution du système est un ***p-uplet*** $(x_1; x_2; \cdots; x_p)$ *pour lesquels toutes les équations sont vérifiées.*

Résoudre le système (S)*, c'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.*

Tout étudiant a déjà rencontré par exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquelles deux méthodes de résolution ont été présentées: par substitution ou combinaisons linéaires. On verra dans la suite qu'on va généraliser la méthode de combinaisons linéaires. On peut commencer par vérifier qu'on sait faire sans difficulté l'exercice suivant.

Exercice 1. Résoudre les trois systèmes suivants:

$$(i)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 2. *Un système est dit :*

- ***compatible*** *lorsqu'il admet au moins une solution,* ***incompatible*** *s'il n'en admet aucune;*
- ***homogène*** *lorsque le second membre est constitué uniquement de coefficients nuls. On appelle* ***système homogène associé*** *à un système* (S) *le système obtenu en gardant les mêmes coefficients et en remplaçant le second membre par des 0;*

- ***de Cramer*** *lorsque $n = p$ et lorsque le système possède une unique solution;*
- ***triangulaire*** *(ou échelonné) lorsqu'il est de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n = b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n = b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots \quad = \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Enfin, deux systèmes sont dits ***équivalents*** *lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.*

Exercice 2. Justifier qu'un système homogène est compatible. Quel est l'ensemble des solutions d'un système homogène de Cramer d'inconnues $(x_1; \cdots; x_n)$?

2 Résolution des systèmes. Le Pivot de Gauss

L'idée est de résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients, car ce genre d'opérations permet toujours de se ramener à un système équivalent à celui de départ.

Proposition 1. Les opération suivantes conduisent à un système équivalent au système précédent:
(1) $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes i et j.
(2) $L_i \leftarrow aL_i$, où $a \in \mathbb{R}^*$: multiplier la ligne i par a.
(3) $L_i \leftarrow L_i + bL_j$, où $i \neq j$, $b \in \mathbb{R}^*$: ajouter b fois la ligne j à la ligne a.
(4) $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, où $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$: remplacer L_i par $aL_i + bL_j$.

✎ **Méthode** (Algorithme du pivot de Gauss)**.** Pour résoudre le système (S):
(1) On rédige "Résolvons le système par la méthode du pivot de Gauss";

(2) On choisit parmi les coefficients **non nuls** du système un coefficient $a_{i,j}$, appelé le **pivot**, que l'on entoure, dans une ligne et une colonne qui ne contiennent pas d'autre pivot. Si c'est impossible on passe à l'étape 5;

(3) On réécrit un système équivalent dans lequel on a supprimé, dans chaque ligne L_k (pour $k \neq i$) l'inconnue x_j en ayant effectué les opérations $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,j}}{a_{i,j}} L_i$ ou $L_k \leftarrow a_{i,j}L_k - a_{k,j}L_i$ (que l'on indique explicitement en parallèle du système);

(4) On reproduit l'étape 2;

(5) On conclut en fonction de la situation :
  (a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, sauf son second membre, alors le système n'a pas de solution.
  (b) sinon, toutes les inconnues dans les colonnes sans pivot sont des **paramètres**, et peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$. On écrit le système correspondant au tableau final avec les inconnues, et on exprime les solutions en isolant les inconnues des colonnes à pivot.

Remarque 1. L'algorithme présenté ci-dessus s'appelle en fait *algorithme* ***total*** *du pivot de Gauss*. Une méthode alternative (très courante), appelée *algorithme partiel du pivot de Gauss*, consiste à n'effectuer l'étape 3 que pour les lignes sans pivot. On obtient dans l'étape 5b un système que l'on résout par des substitutions simples.

Le **bon choix des pivots est fondamental** pour alléger les calculs. On choisira en priorité les pivots dans des colonnes contenant le plus de termes nuls possibles. De plus, il faut toujours privilégier les pivots les plus simples, les coefficients égaux à 1 étant l'idéal.

On peut s'écarter légèrement de cette algorithme pour :

- Simplifier une ligne avec l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ (cela permet par exemple d'obtenir un pivot égal à 1);
- Conclure directement que le système est incompatible lorsque deux lignes sont manifestement contradictoires;
- Supprimer une ligne identique (ou proportionnelle) à une autre;
- Trouver une combinaison qui rend la résolution triviale.

Exemple. Résolvons le système (S) suivant par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{1}x & + & y & + & z & = & 6 & \quad L_1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 & \quad L_2 \\ 3x & & & - & z & = & 0 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{1}x & + & y & + & z & = & 6 & \quad L_1 \\ & & \boxed{\text{-3}}y & - & z & = & -9 & \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & -3y & - & 4z & = & -18 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 6 & \quad L_1 \\ & & \boxed{\text{-3}}y & - & z & = & -9 & \quad L_2 \\ & & & & -3z & = & -9 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{-3}{-3}L_1 \end{array} \right.$$

En s'arrêtant là, c'est un pivot der Gauss partiel. Le système obtenu est triangulaire. On a directement $z = 3$ et en *remontant* le système on peut facilement et rapidement trouver les solutions pour les autres inconnues. Cependant, on décide ici de présenter un pivot de Gauss total. Ainsi, l'étape précédente est remplacée par une étape intégrant l'opération $L_1 \longleftarrow 3L_1 + L_2$.

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 3x & & & + & 2z & = & 9 & \quad L_1 \longleftarrow 3L_1 + L_2 \\ & & \boxed{\text{-3}}y & - & z & = & -9 & \quad L_2 \\ & & & & -3z & = & -9 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{-3}{-3}L_1 \end{array} \right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 3x & & & + & 2z & = & 9 & \quad L_1 \\ & & -3y & - & z & = & -9 & \quad L_2 \\ & & & & \boxed{1}z & = & 3 & \quad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & & & = & 3 & \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ & -3y & & = & -6 & \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_3 \\ & & z & = & 3 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & & & = & 1 & \quad L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ & y & & = & 2 & \quad L_2 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & & z & = & 3 & \quad L_3 \end{array} \right.$$

Les solutions apparaissent alors clairement à la fin de l'algorithme: $\mathcal{S} = \{(1, 2, 3)\}$. En particulier, le système (S) est un système de Cramer.

Exercice 3. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous?

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 40 \\ 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 41 \\ 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \end{array}\right.$$

3 Systèmes de Cramer

On a vu précédemment qu'un système homogène de n équations à n inconnues était de Cramer si et seulement si son unique solution était le $n-$uplet $(0; 0; \dots; 0)$.

On peut également donner des critères selon lesquels un système sera de Cramer.

Théorème 1. *Un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si la méthode du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots (non nuls).*

Théorème 2. *Un système est de Cramer si et seulement si son système homogène est de Cramer.*

Exercice 5. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ le système suivant est de Cramer.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & \lambda y & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & (\lambda-5)z & = & 7 \end{array}\right.$$

4 Autres exercices

Exercice 6. Pour chacun des systèmes suivants, répondre aux questions suivantes :

(1) Est-il échelonné (*i.e.* triangulaire)?
(2) Si oui quelles sont les inconnues principales (*i.e.* les pivots) et quelles sont les inconnues secondaires?
(3) Résoudre le système.

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ & & 22y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ & & & & 2z & - & t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants:

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & + & 2t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & t & = & -1 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{rcrcr} u & + & w & = & 1 \\ v & + & w & = & 0 \\ u & + & v & = & 12 \\ u & + & 3v & = & 0 \end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & -5 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & + & t & = & -1 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8. (Systèmes à paramètres)

(1) On considère le système

$$(E_\lambda)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & - & 3y & + & 6z & = & 0\\ 6x & - & (8+\lambda)y & + & 12z & = & 0\\ 3x & - & 3y & + & (4-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer?
(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ

(2) Mêmes questions avec le système suivant

$$(F_\lambda)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda x & + & 2y & + & 2z & = & 0\\ 2x & - & \lambda y & - & z & = & 0\\ -x & - & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d:

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a\\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b\\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a\\ x & - & y & - & z & - & t & = & b\\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c\\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a\\ 3x & + & y & - & 5z & = & b\\ 4x & + & 2y & - & z & = & c\\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 10. Résoudre les systèmes suivants en fonction du ou des paramètre(s):

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} & & y & = & \lambda x\\ x & + & z & = & \lambda y\\ y & + & t & = & \lambda z\\ z & + & u & = & \lambda t\\ & & t & = & \lambda u \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0\\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1\\ ax & + & by & + & cz & = & d\\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right. \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ deux-à-deux distincts.}$$

Exercice 11. Soient a et b sont deux réels et n est un entier naturel non nul. On considère le système (S) suivant:

$$(S)\left\{\begin{array}{lclcll} x_2 & = & ax_1 & + & b & \quad L_1\\ x_3 & = & ax_2 & + & b & \quad L_2\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_n & = & ax_{n-1} & + & b & \quad L_{n-1}\\ x_1 & = & ax_n & + & b & \quad L_n \end{array}\right.$$

(1) Déterminer l'équation obtenue en effectuant l'opération:

$$L_n \longleftarrow a^{n-1}L_1 + a^{n-2}L_2 + \cdots + aL_{n-1} + L_n.$$

(2) En déduire l'ensemble des solutions du système S selon les valeurs de a et b.