

---

# Chapitre 6. Probabilités élémentaires

## 1 Espaces probabilisés: le langage des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. L'étude de cette expérience nécessite alors la description de tous les résultats possibles, appelés **issues** (ou éventualités). L'ensemble de toutes les issues est appelé **univers** des possibles et est souvent noté  $\Omega$ .

L'énoncé d'un exercice de probabilité (c'est à dire d'une expérience aléatoire) ne précise pas l'univers des possibles explicitement. C'est donc à celui ou celle qui en fait l'étude et cherche à résoudre l'exercice de *décrire* cet ensemble d'une manière rigoureuse et commode afin de travailler dessus. Cette étape s'appelle la **modélisation** de l'expérience.

*Exemple.* Regardons les univers correspondants aux expériences suivantes.

**Expérience 1:** On lance un dé cubique à 6 faces et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les résultats possibles sont alors  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  qui est un ensemble de cardinal 6.

**Expérience 2:** On lance deux dés discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les résultats obtenus. On voit alors qu'ici  $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\} = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ , qui est un ensemble à 36 éléments.

**Expérience 3:** Cette fois les deux dés sont identiques, mais on note encore les résultats obtenus. Comme on ne peut plus faire la différence entre les deux dés, les deux résultats de l'expérience précédent (1; 3) et (3; 1) sont en particulier dans cette nouvelle expérience l'expression de la même issue  $\{1; 3\}$ . Ainsi, on a

$$\Omega = \{\{i; j\} : 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

De plus,

$$\text{card}(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} 1 = \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^j 1 = \sum_{j=1}^6 j = \frac{6 \times 7}{2} = 21.$$

**Expérience 4:** On lance un dé et on regarde le résultat obtenu. Si ce résultat est 6, on arrête. Sinon, on relance le dé. On répète le processus jusqu'à obtenir 6 et on note le nombre de coups nécessaires. Il est possible d'avoir un 6 au premier coup, mais il est possible que le 6 n'arrive qu'au 7ème ou au 100ème coup, voire même au 1000ème. En fait, il est théoriquement possible que le premier 6 ne sorte qu'au  $n$ -ième coup, pour n'importe quel  $n$  entier naturel. Ainsi,  $\Omega = \mathbb{N}$ . On peut donc tout à fait avoir un univers des possibles infini.

**Expérience 5:** On choisit au hasard un nombre réel entre 0 et 1. Ici, clairement  $\Omega = [0; 1]$  est encore un ensemble infini.

**Exercice 1.**

- (1) On lance  $n$  fois une pièce de monnaie. Quel est l'univers des possibles? Combien comporte-t-il d'éléments?
- (2) On joue à l'*Euromillion*. On doit pour cela cocher 5 cases d'une grille comportant les nombres de 1 à 50 puis cocher deux étoiles parmi 11. Quel est l'univers des possibles? Combien comporte-t-il d'évènements?

**Définition 1.** Un *évènement aléatoire* est un fait qui peut se produire, ou non, suivant le résultat d'une expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des issues qui le réalisent. Il s'agit donc d'une *partie* de  $\Omega$ . Un évènement ne comportant qu'une seule issue est appelé *évènement élémentaire* (et se représente par un singleton).

*Exemple.*

- Dans l'expérience 1 précédente, on peut par exemple considérer l'évènement "le résultat est un nombre pair" qui se représente par l'ensemble  $\{2; 4; 6\}$ .
- Il apparaît nécessaire de décrire l'ensemble des évènements que l'on considère et que l'on veut "mesurer" via la notion de probabilité, d'où l'introduction ci-après de la notion de *tribu*.
- Lorsque  $\Omega$  est un ensemble **fini**, l'ensemble des évènements que l'on considère est le plus souvent l'ensemble de toutes les parties de  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}(\Omega)$ . En particulier, tout élément permet de former un évènement élémentaire et de plus  $\Omega$  et  $\emptyset$  sont des évènements appelés respectivement *évènement certain* et *évènement impossible*.

**Exercice 2.** On effectue l'expérience 2 précédente. Décrire les évènements suivants:

- (i) A "la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 10";
- (ii) B "le produit des nombres obtenus est supérieur ou égal à 20".

L'identification entre évènements et sous-ensembles de  $\Omega$  permet d'utiliser les opérations élémentaires de la théorie des ensembles pour traduire certains évènements, notamment les notions suivantes:

- (A ou B) est modélisé par  $A \cup B$ .
- (A et B) est modélisé par  $A \cap B$ .
- la non réalisation de l'évènement  $A$  est modélisée par  $\overline{A}$ .

Naturellement, on peut combiner des opérations pour décrire des évènements plus complexes et toutes les règles de calcul sur les ensembles sur chapitre correspondant sont alors utiles et utilisées.

**Exercice 3.** On lance deux pièces successivement. On note  $E$  l'évènement "la première pièce montre pile" et  $G$  "la deuxième pièce montre pile". Traduire les évènements suivants:  $E \cup G$ ,  $E \cap G$ ,  $\overline{E}$ ,  $\overline{G}$ ,  $\overline{E \cup G}$  et  $\overline{E} \cap G$ .

**Exercice 4.** On lance  $n$  fois consécutives une pièce (où  $n$  est un entier). Si  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $P_k$  l'évènement "on obtient pile au  $k$ -ième lancer",  $A_n$  l'évènement "on obtient que des pile au cours des  $n$  lancers", et  $B_n$  l'évènement "on obtient au moins une fois pile au cours des  $n$  lancers".

- (1) Exprimer  $A_n$  à l'aide des  $P_k$ .
- (2) Exprimer  $B_n$  à l'aide des  $P_k$ .
- (3) Exprimer l'évènement "le premier pile apparaît au  $n$ -ième lancer".

**Définition 2.** Deux évènements sont dits *incompatibles* lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément. Ces deux évènements étant représentés par  $A$  et  $B$ , éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , il seront incompatibles si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

☞ Naturellement, un évènement et son contraire sont toujours incompatibles.

**Définition 3.** On dira qu'une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'évènements forme un **système complet d'évènements** si c'est une partition de  $\Omega$ , c'est à dire s'ils recouvrent l'univers et sont deux à deux incompatibles:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \quad \text{et} \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

☞ L'ensemble des évènements élémentaires forme naturellement toujours un système complet d'évènements.

### Notion de Tribu. Espace probabilisable

Afin de pouvoir définir rigoureusement la notion de probabilité, il est important que l'ensemble des évènements que la probabilité vise à "mesurer" possède quelques propriétés de stabilité. On introduit pour cela la notion de tribu, puis d'espace probabilisable.

**Définition 4.** Soit  $\Omega$  un ensemble. On appelle **tribu** de parties de  $\Omega$  tout sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  tel que

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
- (ii) Si  $A \in \mathcal{A}$ , alors  $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ;
- (iii) Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille d'évènements de  $\mathcal{A}$ , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Munir  $\Omega$  d'une tribu amène à considérer l'**espace probabilisable**  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Les éléments de  $\mathcal{A}$  seront alors appelés les **évènements** de l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Une tribu est donc un ensemble de parties qui contient l'univers, qui est stable par passage au complémentaire et stable par union *dénombrable* (c'est à dire indexée par  $\mathbb{N}$ ).

Naturellement, l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu de  $\Omega$  (c'est d'ailleurs la tribu naturelle et celle que l'on utilise lorsque  $\Omega$  est un ensemble fini). Mais on peut très bien définir et utiliser des tribus plus petites. Il peut être effet s'avérer difficile de "mesurer" certains ensembles assez compliqués lorsque  $\Omega$  est un ensemble infini, d'où la volonté de réduire l'ensemble des évènements considérés.

Par exemple, pour  $A \subset \Omega$ , on peut regarder la tribu  $\sigma_A = \{\emptyset; A; \bar{A}; \Omega\}$ . C'est bien une tribu car elle vérifie les conditions de la définitions précédentes. C'est en fait la plus petite tribu qui contient l'évènement  $A$ . On l'appelle *tribu engendrée par  $A$* .

On peut par ailleurs, déduire immédiatement de la définition de tribu la propriété suivante.

**Proposition 1.** Soit  $\mathcal{A}$  une tribu de parties de  $\Omega$ . Alors,

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (2) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  alors

$$A \cup B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

- (3) Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  famille d'éléments, alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Une fois que l'espace est probabilisable, il est "prêt" à être également muni d'une probabilité. Il est possible de définir la notion de probabilité pour n'importe quel espace probabilisable, cependant, dans ce premier chapitre consacré aux probabilités, on ne s'intéressera qu'au cas où l'univers  $\Omega$  est un ensemble **fini**.

## 2 Probabilités sur un ensemble fini

Dans toute la suite, on considère donc un univers  $\Omega$  **fini**.

## 2.1 Petite discussion introductive

On peut se demander pourquoi introduire de tels objets et autant préparer le terrain. Regardons les deux expériences suivantes qui se modélisent par le même univers.

Si on lance un dé cubique équilibré un grand nombre de fois, on constate que la fréquence d'apparition de chaque face se rapproche de  $\frac{1}{6}$ , ce qui suggère une modélisation de l'expérience par une *probabilité uniforme* sur  $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Si maintenant le dé est truqué, l'univers reste le même mais la probabilité d'apparition de chaque face n'est plus la même, par exemple on pourrait avoir

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{16}; \quad p(\{5\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on peut définir deux probabilités différentes  $P$  et  $p$  sur le même univers  $\Omega$ . Il est donc important de préciser ce qu'est une probabilité, et les événements qu'elle peut "mesurer", d'où la notion d'espace probabilisable et la définition rigoureuse de probabilité qui suit.

## 2.2 Notion de probabilité sur un ensemble fini. Premières propriétés

**Définition 5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute application  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$  telle que

$$(i) \quad P(\Omega) = 1;$$

$$(ii) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

On dit alors que  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un **espace probabilisé**. De plus, pour chaque événement  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(A)$  s'appelle la *probabilité de A*.

 *Exemple et Définition* (Probabilité uniforme).

On considère un ensemble fini, non vide,  $\Omega$  ainsi que l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . On appelle **probabilité uniforme** sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  (ou plus simplement sur  $\Omega$ ) l'application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0; 1] \\ A &\mapsto \frac{\#A}{\#\Omega} \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que l'application  $P$  satisfait bien les conditions de la définition précédente: c'est bien une probabilité. De plus, si  $\omega \in \Omega$ , alors

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}.$$

En particulier, tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

 *La probabilité uniforme modélise une expérience dont toutes les issues sont équiprobables*

**Exercice 5.** Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

- (1) Quelle est la probabilité que les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
- (2) Quelle est la probabilité que  $p$  premiers tomes ( $1 \leq p \leq 28$ ) apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

**Proposition 2** (Loi de probabilité de  $P$ ). Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , alors

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

En particulier, si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  alors

$$1 = \sum_{k=1}^n P(\{\omega_k\}).$$

Une probabilité est ainsi caractérisée par les valeurs  $(P(\{\omega_1\}), \dots, P(\{\omega_n\}))$ , ce qu'on appelle **loi de probabilité de  $P$** .

**Exercice 6.** Un joueur lance une bille sur une planche percée de  $n$  trous numérotés de 1 à  $n$  ( $n > 2$ ). La bille tombe toujours dans un trou (et dans un seul). La probabilité que la bille tombe dans le trou numéro 1 est  $\frac{1}{3}$ , celle qu'elle tombe dans le trou numéro 2 est  $\frac{1}{3^2}$  et plus généralement celle du trou numéro  $k$  est  $\frac{1}{3^k}$  (pour  $1 \leq k < n$ ). Quelle est alors la probabilité qu'elle tombe dans le trou numéro  $n$ ?

Il découle directement de la définition de probabilité la proposition suivante.

**Proposition 3** (Calcul des probabilités).

Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé (fini) et  $A, B$  deux évènements. Alors,

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ;
- (iii) Si  $A \subset B$ , alors  $P(A) \leq P(B)$ .

Pour calculer la probabilité d'une union, on utilise la formule du crible de Poincaré.

**Proposition 4** (Probabilité d'une union: formule du crible de Poincaré).

Soient  $A, B, C$  trois évènements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

**Exercice 7.** On tire, avec remise, une boule dans une urne, qui en contient une bleue, une blanche et une rouge,  $n$  fois de suite. On note  $p_n$  la probabilité que les trois couleurs apparaissent au moins une fois lors des  $n$  tirages et  $A$  l'évènement "la boule bleue n'apparaît pas pendant les  $n$  tirages",  $B$  l'évènement "la boule blanche n'apparaît pas pendant les  $n$  tirages" et  $C$  l'évènement analogue pour la boule rouge.

- (1) Calculer  $P(A \cup B \cup C)$ .
- (2) En déduire une expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- (3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter le résultat.

**Proposition 5** (Unions disjointes).

Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé (fini) et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'évènements deux à deux incompatibles. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

En particulier, si  $(A_i)_{i \in I}$  est un système complet d'évènements,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

**Exercice 8.** Une urne contient 3 boules jaunes, 3 boules bleues, 3 rouges, 3 vertes et 3 noires. On tire successivement, sans remise, 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité que le tirage soit unicolore.

### 2.3 Probabilités conditionnelles

Lorsque l'on réalise (successivement une ou plusieurs expériences aléatoires, on peut voir tenir compte dans une prévision d'une information complémentaire. Imaginons par exemple qu'on lance un dé (cubique) équilibré. La probabilité d'obtenir un 6 est alors égale à  $\frac{1}{6}$ . Si maintenant, je tiens compte du fait que les faces du dé sont peintes, en vert pour les chiffres pairs, et en rouge pour les impairs. La probabilité d'obtenir un 6 **sachant** que je vois que la face est verte est alors de  $\frac{1}{3}$ . Cette probabilité est **conditionnée** par la couleur de la face, c'est une *probabilité conditionnelle*.

**Définition 6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé dont  $B$  est un évènement non négligeable (i.e.  $P(B) > 0$ ). Pour tout évènement  $A$ , on définit la **probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$**  par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Le calcul des probabilités conditionnelles peut s'avérer difficile est les résultats contre-intuitifs, comme on pourra le voir avec l'exercice ci-dessous. Il est donc capital de faire preuve de rigueur et de vigilance lors des calculs et de la modélisation et la formulation de l'expérience.

**Exercice 9** (Paradoxe des enfants, extrait de *Scientific American* (1959)).

Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls? Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?

**Proposition 6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé dont  $B$  est un évènement non négligeable. Alors, l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0; 1] \\ A &\rightarrow P_B(A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .

**Corollaire 1.** La probabilité  $P_B$  vérifie donc toutes les règles de calcul des probabilités. Plus précisément, si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,

- (1)  $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$ ;
- (2) Si  $A_1 \subset A_2$ , alors  $P_B(A_1) \leq P_B(A_2)$ ;
- (3) les formules du crible de Poincaré restent vrai en remplaçant  $P$  par  $P_B$ .

**Corollaire 2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé. Pour tous évènements  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  avec  $P(B) > 0$ , on a

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

☞ *Le résultat précédent est très pratique pour calculer des probabilités d'intersection à partir des probabilités conditionnelles.*

Il est également possible de conditionner par plusieurs évènements et le résultat précédent se généralise pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'évènements. On appelle cela *Formule des probabilités composées*. La démonstration se fait par récurrence et on invite le lecteur à tenter de l'écrire.

**Proposition 7** (Formule des probabilités composées).

Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'évènements tels que  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Alors,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

**Exercice 10.** On dispose de trois urnes  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{U}_3$  qui contiennent des boules blanches et noires:

- $\mathcal{U}_1$  contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_2$  contient 4 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$  contient 6 boules blanches et 1 noire.

On effectue trois tirages successifs en suivant le protocole qui suit:

- On tire au hasard une boule dans l'urne  $\mathcal{U}_1$  et on note sa couleur. On place ensuite cette boule dans l'urne  $\mathcal{U}_2$ .
- On tire ensuite une boule dans l'urne  $\mathcal{U}_2$ , on note encore sa couleur et on la place dans l'urne  $\mathcal{U}_3$ .
- Enfin, on tire une dernière boule dans l'urne  $\mathcal{U}_3$  dont on note la couleur.

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur?

Le résultat qui suit est très important et très utile, il permet de calculer la probabilité d'un évènement en conditionnant par un système complet d'évènements.

**Proposition 8** (Formule des probabilités totales).

Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  un système complet d'évènements tous non négligeables. Alors, pour tout évènement  $B$ , on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \times P(A_i).$$

☞ Cette formule est notamment utilisée souvent pour un système complet de deux évènements  $A$  et  $\bar{A}$  (non négligeables). Elle s'écrit alors

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}).$$

**Exercice 11.** On dispose de quatre urnes numérotées:

- $\mathcal{U}_1$  contient 4 boules blanches et 1 noire;
- $\mathcal{U}_2$  contient 3 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$  contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_4$  contient 1 boule blanche et 4 noires;

On choisit au hasard une urne parmi les quatre et on tire une boule à l'intérieur. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

On peut également se demander si il est possible d'"inverser" des probabilités conditionnelles. C'est à dire si, connaissant par exemple  $P_B(A)$  on peut obtenir  $P_A(B)$ . C'est l'objet de la formule suivante, appelée *Formule de Bayes* qu'on énonce en deux temps, commençant par le cas particulier de deux évènements. Sa démonstration est facile et repose sur la formule des probabilités totales.

**Proposition 9** (Formule de Bayes). Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé.

❶ *Version simple :*

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements non négligeables. On a alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})}.$$

❷ *Version générale :*

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'évènements tous non négligeables. Soit  $B$  un autre évènement également de probabilité non nulle.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

**Exercice 12** (Le paradoxe des maladies rares).

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population avec la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage: si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Que penser de ce test?

## 2.4 Indépendance en probabilités

Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A, B$  deux événements. *Intuitivement*, on dira que  $A$  et  $B$  sont *indépendants* si la réalisation de  $B$  ne change rien pour celle de  $A$  et inversement. Plus rigoureusement, on introduit la définition suivante.

**Définition 7.** Deux événements  $A$  et  $B$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  sont dits **indépendants pour la probabilité  $P$**  si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

En particulier, si  $P(B) \neq 0$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P_B(A) = P(A)$ .

**⚠ Attention.** La notion d'indépendance dépend de la probabilité qui équipe l'espace. En particulier, et contre l'idée intuitive que l'on pourrait avoir, deux événements peuvent être indépendants pour un certaine probabilité  $P$  mais pas pour une autre! On sera donc vigilants. Cela dit, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité  $P$ , on dira simplement que les deux événements sont indépendants.

**Exercice 13.** On effectue l'**expérience 1** (on lance un dé cubique et on regarde le résultat). On munit  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  de l'ensemble de ses parties et de deux probabilités:

- $P_1$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$ ;
- $P_2$  est la probabilité "dé pipé" définie par :

$$P_2(\{6\}) = \frac{1}{3}, \quad P_2(\{5\}) = P_2(\{4\}) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P_2(\{1\}) = P_2(\{2\}) = P_2(\{3\}) = \frac{1}{9}.$$

On considère les événements  $A$  "obtenir 4 ou 5" et  $B$  "obtenir 5 ou 6". Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants pour la probabilité  $P_1$ ? Et pour la probabilité  $P_2$ ?

**Exercice 14.** On considère une famille avec des enfants. On considère qu'il y a équiprobabilité de la répartition des sexes.

- (1) On suppose qu'il y a deux enfants. Étudier l'indépendance des événements:
  - $A$  "la famille a des enfants de deux sexes";
  - $B$  "la famille a au plus un garçon".
- (2) Qu'en est-il de l'indépendance des ces mêmes événements si la famille compte trois enfants?

**⚠ Attention.** Deux événements (non négligeables) **incompatibles ne sont pas indépendants**. en particulier, si  $A$  est un événement non négligeable alors  $A$  et  $\bar{A}$  (qui sont bien incompatibles) ne sont pas indépendants!

**Proposition 10.** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A, B$  deux événements **indépendants pour la probabilité  $P$** , alors

- (1) les événements  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.
- (2) les événements  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.
- (3) les événements  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

On peut alors s'intéresser à l'indépendance mutuelle de plusieurs événements. Cependant, la généralisation de la notion d'indépendance est plus délicate qu'il n'y paraît. Par exemple, si on a trois événements  $A, B, C$ , on pourrait d'un côté regarder leur indépendance *deux à deux*:

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \quad P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \quad \text{et} \quad P(C \cap A) = P(C) \times P(A).$$

Mais on pourrait aussi vouloir que la probabilité de l'intersection des trois évènements soit égale au produit des trois probabilités:

$$(2) \quad P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C).$$

Or, ces deux conditions ne sont pas du tout équivalentes, comme le montre l'exercice ci-dessous.

**Exercice 15.** On lance deux fois un dé équilibré. On considère les évènements  $A$  "le premier numéro est pair",  $B$  "le deuxième numéro est impair" et  $C$  "la somme des deux numéros est paire".

- (1) Calculer la probabilité de ces évènements.
- (2) Ces évènements sont-ils indépendants 2 à 2 ? Mutuellement indépendants ?

La définition est alors la suivante.

**Définition 8.** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini et  $A_1, \dots, A_n$  un nombre fini d'évènements. On dit que  $A_1, \dots, A_n$  sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité  $P$  si pour tout sous-ensemble d'indices  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$P \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

☞ La définition d'indépendance mutuelle est donc *plus forte* que l'indépendance "deux à deux" (qui est par conséquent une condition nécessaire mais non suffisante).

Ainsi, trois évènements  $A, B$  et  $C$  seront mutuellement indépendants les les relations (1) **et** (2) sont vérifiées.

**Proposition 11.** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini et  $A_1, \dots, A_n$  des évènements mutuellement indépendants. Soit alors  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  les évènements tels que  $B_i = A_i$  ou bien  $B_i = \overline{A}_i$ . Alors, les évènements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sont encore mutuellement indépendants.

☞ On peut donc remplacer n'importe lequel des évènements d'une famille d'évènements mutuellement indépendants par son évènement contraire en conservant l'indépendance mutuelle.

### 3 Autres exercices

**Exercice 16.**

- (1) On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
- (2) On tire au hasard et successivement, sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
- (3) On tire au hasard et successivement, avec remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?

**Exercice 17.** On lance trois fois consécutives un dé équilibré à 6 faces et les résultats sont respectivement notés  $a, b$  et  $c$ . On forme alors le polynôme aléatoire  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Calculer la probabilité que

- (1)  $P$  ait une seule racine réelle.
- (2)  $P$  ait deux racines réelles.
- (3)  $P$  n'ait aucune racine réelle.

**Exercice 18.** Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise 5 cartes.

- (1) Calculer la probabilité que le premier as apparaisse :
 

a) à la première pioche,	b) à la seconde pioche,	c) à la troisième pioche
d) à la quatrième pioche,	e) à la cinquième pioche,	f) jamais.

(2) Reprendre la question précédente avec le second as.

**Exercice 19.** Dans une loterie, il y a 30 billets dont  $n$  sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète deux billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de  $n$  à partir on a 90% de chances de gagner.

**Exercice 20.** On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est  $\frac{1}{2}$ .

- (1) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. À l'aide de la formule de Bayes, déterminer la probabilité que le dé choisi soit pipé.
- (2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé?
- (3) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

**Exercice 21.** On dispose de deux urnes,  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$ . La première contient deux boules blanches et quatre noires alors que la seconde contient cinq boules blanches et sept noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:

- On choisit une urne au hasard et on tire la boule dans l'urne choisie
- On note la couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient
- Si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne  $\mathcal{U}_1$ , sinon dans l'autre.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'évènement "la boule tirée au  $n$ -ième tirage est blanche" et  $p_n = P(B_n)$ .

- (1) Calculer  $p_1$ .
- (2) Trouver une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
- (3) En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 22.** On dispose de deux dés (cubiques)  $A$  et  $B$ :

- Le dé  $A$  a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- Le dé  $B$  a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie, dont la probabilité d'obtenir "pile" est  $\frac{1}{3}$ : si on obtient "pile", on ne joue qu'avec le dé  $A$ , sinon on ne joue qu'avec le dé  $B$ .

- (1) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au troisième lancer sachant qu'on a obtenu "rouge" aux deux premiers?
- (2) On a obtenu  $n$  fois "rouge" en  $n$  jets du dé. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec le dé  $A$ ?

**Exercice 23.** Une pièce  $A$  donne "face" avec la probabilité  $\frac{2}{5}$ , une pièce  $B$  avec la probabilité  $\frac{7}{10}$ . On lance une des deux pièces au hasard: si on obtient "face", on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela  $n$  lancers. On cherche à obtenir  $p_n$  la probabilité d'obtenir "face" au  $n$ -ième lancer. Pour cela, on introduit  $a_n$  la probabilité de lancer la pièce  $A$  au  $n$ -ième coup.

- (1) Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ . En déduire l'expression, en fonction de  $n$ , de  $a_n$ .
- (2) Exprimer  $p_n$  en fonction de  $a_n$ . Conclure.

**Exercice 24.** Une boîte  $A$  contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte  $B$  contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération  $n$  fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans la boîte  $A$  à l'instant  $t = n$ . Pour cela, on introduit les évènements :

- $P_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 0 ";
- $Q_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 1 ";
- $R_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 2 ";

On pose également  $p_n = P(P_n)$ ,  $q_n = P(Q_n)$  et  $r_n = P(R_n)$ .

- (1) Calculer  $p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1$ .
- (2) Exprimer  $p_{n+1}$  (resp.  $q_{n+1}$ , resp.  $r_{n+1}$ ) en fonction de  $p_n, q_n, r_n$

- (3) Montrer que  $\forall n \geq 0, \quad q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$ .
- (4) En déduire l'expression de  $q_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $p_n$  et de  $q_n$ .
- (5) Déterminer les limites des trois suites. Interpréter ce résultat.

**Exercice 25.** Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne, en notant à chaque fois la couleur. On s'intéresse aux évènements:

- $A_n$  "les deux couleurs sont présentes à l'issue des  $n$  tirages";
  - $B_n$  "on obtient au plus une boule noire".
- (1) Déterminer les probabilités, en fonction de  $n$ , des évènements  $A_n$  et  $B_n$ .
- (2) Étudier leur indépendance pour  $n = 2$  et  $n = 3$ .

**Exercice 26.** (Chaussettes, Extrait DM 8, Automne 2015)

On range  $k$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs, au hasard. Avec quelle probabilité les paires de chaussettes se retrouvent-elles toutes dans des tiroirs différents?

**Exercice 27.** Dans un groupe d'étudiants, il y a  $n$  filles et  $n$  garçons. On veut faire des groupes de deux pour des exposés et ces groupes seront choisis au hasard.

- (1) Combien y a-t-il de listes ordonnées de paires d'étudiants?
- (2) Combien de ces listes sont formées uniquement de groupes mixtes?
- (3) En déduire la probabilité  $p_n$  que tous les groupes soient mixtes.
- (4) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

- (5) Quelle est alors la limite de  $p_n$ ?

**Exercice 28.** (Poker, Extrait DM 8, Automne 2015) Une main de poker est constituée de cinq cartes, choisies parmi 32. Il y a dans le jeu 4 couleurs (Trèfle ♣, Pique ♠, Coeur ♥ et Carreau ♦) et 8 valeurs par couleur (7,8,9,10, Valet, Dame, Roi et As). Déterminer, en fonction de leur probabilité d'apparition, l'ordre des combinaisons (de la plus "forte" à la plus "faible") parmi

- le *brélan*: 3 cartes de la même valeur et rien de mieux;
- le *carré*: 4 cartes de la même valeur;
- la *quinte flush*: 5 cartes qui se suivent et qui sont de la même couleur;
- la *couleur*: 5 cartes d'une même couleur autre que la quinte flush;
- la *suite*: 5 cartes qui se suivent mais pas de la même couleur.

**Exercice 29.** (Évolution du cours d'un titre, Extrait DM 9, Automne 2015)

Soit  $a$  un réel fixé, élément de  $]0; \frac{1}{2}[$ .

Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que:

- le premier jour, le titre est stable;
- si le jour  $n$  le titre monte, alors il montera également le jour  $n + 1$  avec probabilité  $1 - 2a$ , restera stable avec probabilité  $a$  et baissera avec probabilité  $a$ ;
- si le jour  $n$  le titre est stable, alors il restera stable le jour  $n + 1$  avec probabilité  $1 - 2a$ , montera avec probabilité  $a$  et baissera avec probabilité  $a$ ;
- si le jour  $n$  le titre baisse, alors il baissera encore le jour  $n + 1$  avec probabilité  $1 - 2a$ , restera stable avec probabilité  $a$  et montera avec probabilité  $a$ .

On note  $M_n$  (resp.  $S_n, B_n$ ) l'évènement "le titre donné monte le jour  $n$ " (resp. "est stable le jour  $n$ ", "baisse le jour  $n$ ") et  $m_n$  (resp.  $s_n, b_n$ ) la probabilité correspondante.

- (1) Exprimer  $m_{n+1}$  en fonction de  $m_n, s_n$  et  $b_n$ . Même question avec  $s_{n+1}$ .
- (2) Que vaut  $m_n + s_n + b_n$ ? En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $m_n$  et  $s_n$ .
- (3) Montrer que les suites  $(m_n)$  et  $(s_n)$  sont arithmético-géométriques.

- (4) En déduire l'expression du terme général de chacune des trois suites et déterminer leurs limites. Interpréter.

**Exercice 30.** (Combat de dés, Extrait DM 9, Automne 2015)

Deux joueurs  $A$  et  $B$  s'affrontent aux dés selon les règles suivantes:

- $A$  lance en premier le dé (qui est cubique et équilibré) et annonce son résultat.
  - $B$  lance à son tour le dé, consécutivement jusqu'à obtenir un résultat supérieur ou égal à celui de  $A$ , avec un maximum de  $N$  tentatives. Si il y arrive, il gagne, sinon il perd.
- (1) Quelle est la probabilité que  $B$  gagne en un coup?
  - (2) Quelle est la probabilité (en fonction de  $N$ ) qu'il perde?
  - (3) Calculer la probabilité précédente pour  $N = 3$ .

**Exercice 31.** (D'après INSEEC 2002, Extrait du Concours Blanc n°1, Janvier 2016)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
  - S'il perd à la  $n^{\text{ième}}$  partie,  $n \geq 1$ , il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la  $n^{\text{ième}}$  partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.
- (1) On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  : « le joueur gagne la  $n^{\text{ième}}$  partie ».
    - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{A_n}(A_{n+1})$  et  $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$ , en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

- (b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .
- (2) Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $B_k$  l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des  $n$  premières parties et ce gain a lieu à la  $k^{\text{ième}}$  partie ».
  - (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer  $P(B_n)$ .
  - (b) Soit  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , calculer  $P(B_k)$ .
  - (c) En déduire la probabilité  $q_n$  que le joueur ne gagne qu'une seule fois au cours des  $n$  premières parties.