ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 8. Matrices

Ce Chapitre introduit la notion de matrice ainsi que les règles de calcul matriciel élémentaire. On utilise également la méthode du pivot de Gauss (vue au Chapitre 4) pour obtenir l'inverse d'une matrice (lorsque ceci est possible). On présente également une application aux suites numériques (voire aux probabilités) du calcul d'une puissance d'une matrice.

1 Vocabulaire et Notations

Dans tout le chapitre n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

Définition 1. *Une* ***matrice*** *A à n lignes et p colonnes est un tableau défini par $n \times p$ éléments de $\mathbb{R}$ notés $a_{i,j}$ (pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$).*

- *Le nombre $a_{i,j}$ est le* coefficient *d'indice (i,j) de la matrice A: il se trouve à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne.*
- *La matrice A est parfois dite de* taille *ou de* format *(n,p) ou tout simplement* matrice $n \times p$.
- *L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

☞ On présente les matrices de cette manière :

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j\text{-ème colonne} & & \phantom{a_{1,p}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Exercice 1.

(1) À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & e \\ \pi & \sqrt{2} & 0{,}2 \end{pmatrix}$ **3)** $\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **5)** $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **6)** $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **8)** $F = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

(2) Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i-j)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 4}}$ et $N = ((-1)^{i+j})_{1\leq i,j\leq 4}$.

☞ On adopte le vocabulaire suivant :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices carrées* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices lignes* de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices colonnes* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire supérieure* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire inférieure* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice diagonale* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  On note parfois $(a_{i,j}) = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$.
- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice symétrique* si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.
- $0_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la *matrice nulle*, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
- $\mathrm{Id}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la *matrice identité* : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1 (elle est parfois simplement notée I_n).

$$\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Donner, dans chaque cas, un exemple de matrice 3×3: triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale et symétrique (on choisira naturellement des matrices différentes de l'identité).

2 Opérations de base sur les matrices

2.1 Somme de matrices - Multiplication par un réel

Définition 2. *On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:*

- ***Addition**: Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors, on définit la matrice somme par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

- ***Multiplication par un réel**: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit le produit de A avec λ par $\lambda\, A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

⚠ Si l'on peut multiplier une matrice de toute taille par un réel, on ne peut **additionner** deux matrices que si elles ont **la même taille.**

Exercice 3. À partir des matrices de l'Exercice 1, calculer $E + D$, $3B$ et $A - 3\mathrm{Id}_3$.

2.2 Produits de matrices

Définition 3. *On définit le **produit** d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice de n lignes et q colonnes suivante:*

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}).$$

⚠ **<u>Attention</u>.** On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

En particulier, il peut être possible de calculer le produit AB mais pas le produit BA! Si les deux matrices sont carrées de même taille, on peut calculer AB et BA mais ces deux produits ne sont en général pas égaux.

On dit que le produit matriciel n'est **pas commutatif**.

Remarque 1. Le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j) \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un nombre, égal à $\ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n$.

✎ Le coefficient (i, j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B. On peut disposer les calculs ainsi:

$$0\times 2 + 3\times 1 + 1\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = AB$$

Exercice 4. À partir des matrices de l'Exercice 1, calculer les produits :

(1) ED (2) DE (3) $A\mathrm{Id}_3$ (4) AC (5) $0_{2,3}A$ (6) EB (7) BE

Proposition 1 (Propriétés du produit)**.** Le produit matriciel ...

(1) est associatif:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC).$$

(2) est distributif à gauche par rapport à $+$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B + C) = AB + AC.$$

(3) est distributif à droite par rapport à $+$:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC.$$

(4) commute avec le produit externe:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

(5) admet la matrice identité comme élément neutre:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A.$$

(6) n'est pas commutatif.
(7) ne vérifie pas la propriété du produit nul (on peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nul).

☞ Les multiples de l'identité commutent avec toutes les autres matrices:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda I_n \cdot A = A \cdot \lambda I_n.$$

2.3 Puissances de matrice

Définition 4. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et A une matrice* ***carrée*** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle* ***puissance*** *k-ième de A, et on note A^k, la matrice*

$$A^0 = \mathrm{Id}_n \quad \textit{et} \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

☞ Toute puissance de la matrice identité est encore égale à l'identité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad I_n^k = I_n.$$

Il est également facile de voir que la puissance d'un multiple de l'identité (ou plus généralement d'une matrice diagonale) se calcule très facilement

Proposition 2. (Puissance d'une matrice diagonale)
Soit M une matrice (carrée) diagonale. Alors, M^k est encore diagonale, et ses éléments diagonaux sont les puissances $k-$ièmes des éléments diagonaux de M:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

☞ Par exemple,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda I_n)^k = \lambda^k I_n.$$

Comme le produit matriciel ne commute pas en général, la puissance de matrice ne garde seulement que certaines propriétés des réels.

Exercice 5. Calculer, si possible,

(1) A^2 **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(2) A^2, A^3 , B^2, AB, BA, $A+B$, $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$ **pour**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) M^0, M^1, M^2, M^3, M^4, M^{100} **pour**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. Soient $k, l, n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_p(R)$.

(1) $A^k A^l = A^{k+l}$.
(2) $(A^k)^l = A^{kl}$.
(3) **Lorsque** A **et** B **commutent**, on a

(i) $(AB)^k = A^k B^k$;
(ii) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$;
(iii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(iv) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;
(v) La *Formule du binôme*:

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}.$$

☞ Toutes les puissances d'une matrice carrée A commutent entre elles.

2.4 Polynômes de matrices

Définition 5. *Soient* $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *une matrice carrée. On définit l'évaluation de* P *en* A *comme la matrice*

$$P(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 \mathrm{Id}_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

☞ Lorsque $P(A) = 0_p$, on dit que P est un *polynôme annulateur* de A.

On peut utiliser les propriétés des polynômes pour obtenir des informations sur les matrices (inverse, puissances). L'exercice suivant est un exemple très intéressant.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

(1) Calculer $P(A)$.
(2) Soit $n \geq 3$. Effectuer la division euclidienne de X^n par P.
(3) En déduire l'expression de A^n.

2.5 Application: Puissances de matrices & suites numériques

Les puissances de matrices peuvent être très utiles dans l'étude des suites récurrentes et des suites croisées.

Exercice 7. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles définies par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ b_0 & = & 2 \\ c_0 & = & 7 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 3b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & 3c_n \end{array} \right.$$

L'objectif de l'exercice est d'obtenir l'expression des termes généraux des trois suites.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
(2) En déduire que $X_n = A^n X_0$.

(3) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p, pour $p \geq 3$.

(4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

(5) Conclure.

3 Inverse d'une matrice

Définition 6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle* ***matrice inverse*** *de A et on note $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie*

$$AA^{-1} = \mathrm{Id}_n = A^{-1}A.$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui admettent une matrice inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

☞ Naturellement, la matrice identité est inversible et elle est sa propre matrice inverse

$$I_n I_n = I_n \Longrightarrow I_n^{-1} = I_n.$$

Proposition 4. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(1) A^{-1} est unique: si $BA = \mathrm{Id}_n$ ou $AB = \mathrm{Id}_n$ alors $B = A^{-1}$;

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(3) ⚠ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 5. (Inverse d'une matrice diagonale)

Si M est diagonale alors elle est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors égale à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de M:

$$\textbf{Si (et seulement si) } \lambda_i \neq 0, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

☞ En particulier,

$$\text{Si } \lambda \neq 0, \quad (\lambda_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n, \qquad \text{ou, autre exemple,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

(1) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que λI_n est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda} I_n$ et que 0_n n'est pas inversible.

Remarque 2. Pour des matrices inversibles, les propriétés de calcul des puissances sont valables pour des puissances négatives.

⚠ **Attention.** La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

En calcul matriciel, lorsqu'une matrice est inversible cela permet d'obtenir de nouvelles règles de calcul. On peut "simplifier" par cette matrice dans les égalités, comme on le fait dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la division. Cependant il ne faut pas oublier de tenir compte de la **non commutativité** des matrices.

Pour ne pas faire d'erreur, il faut multiplier, à gauche ou à droite, par l'inverse de la matrice.

Proposition 6. Soient $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, et A et B des matrices telles que les produits suivants aient un sens.

Simplification à gauche: $\begin{array}{l} CA = B \iff A = C^{-1}B \\ CA = CB \iff A = B \end{array}$

Simplification à droite: $\begin{array}{l} AC = B \iff A = BC^{-1} \\ AC = BC \iff A = B \end{array}$

Exercice 9.

(1) Soient A, B telles que $AB = 0$. Montrer que si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

(2) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

3.1 Polynôme annulateur et inverse

Soit A une matrice carrée de taille n. La connaissance d'un polynôme annulateur de A, **si le coefficient constant de ce dernier est non nul**, peut permettre de conclure, par **factorisation** par A, à l'inversibilité de A et d'exprimer l'inverse comme polynôme de A.

Exemple. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier (exercice) que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A. Mais alors,

$$P(A) = 0 \iff A^2 + A - 2I_3 = 0 \iff A^2 + A = 2I_3 \iff A\left(\frac{1}{2}(A + I_3)\right) = I_3.$$

Or, on sait que A commute avec tout polynôme évalué en A. On a donc trouvé, sans trop d'efforts, l'inverse de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Cas particulier des matrices 2×2

Proposition 7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre nombres réels. Alors,

(1) Si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.

(2) Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3.3 Pivot de Gauss et inverse d'une matrice

La propriété suivante, admise, permet de caractériser les matrices inversibles à l'issue de l'algorithme du pivot de Gauss, effectué sur la matrice sans l'augmenter d'un second membre.

Proposition 8. Le nombre de pivots obtenus dans la résolution d'un système par la méthode de Gauss (qu'elle soit totale ou partielle) ne dépend pas du choix des pivots. Ce nombre est appelé le **rang du système** ou le **rang de la matrice**. Un système est de Cramer lorsqu'il y a autant de pivot que d'inconnue et d'équation.

✎ *Par conséquent, une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si on a n pivot à l'issue d'un algorithme du pivot de Gauss.*

☞ Si la question est uniquement de savoir si une matrice est inversible ou non, il est alors beaucoup plus économique en terme de calcul de ne faire qu'un algorithme partiel.

Proposition 9. Un matrice triangulaire (et a fortiori diagonale) est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.

En plus de permettre de savoir si une matrice est inversible, le pivot de Gauss permet de calculer l'inverse de la matrice.

✎ **Méthode.** On considère une matrice A carrée de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) dont **on sait** qu'elle est inversible. Pour calculer A^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss **total** sur la matrice A avec comme second membre Id_n, en le prolongeant jusqu'à obtenir la matrice identité à la place de A. La matrice obtenue à la place de Id_n est alors A^{-1}.

Exemple. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est nécessaire de commencer par vérifier que cette matrice est inversible. Pour cela, on effectue un pivot de Gauss partiel sur les coefficients de la matrice jusqu'à obtenir une matrice de rang 3. En faisant par exemple $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$ on voit que la matrice est *semblable* à la matrice

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux non nuls. Par conséquent, A est bien inversible. On peut donc effectuer notre pivot de Gauss total. On présente les choses comme ceci:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On commence donc par faire, comme précédemment, $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Enfin, on se ramène à des coefficients diagonaux égaux à 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On peut alors **vérifier** que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et conclure que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Démontrer la Proposition 7.

3.4 Calcul de puissance de A *via* calcul de $P^{-1}AP$

Dans le but de calculer les puissances d'une matrice A, on peut être amener à "tranformer" la matrice A en une matrice plus simple (par exemple diagonale) à l'aide d'une matrice inversible. Si la recherche de la matrice P nécessite des éléments du cours de deuxième année (voir le chapitre *Diagonalisation*), on peut, si on nous donne la bonne matrice, utiliser cette technique dès à présent.

Exercice 11. On considère les matrices On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et préciser P^{-1}.
(2) Déterminer $D = P^{-1}AP$. Expliciter alors la matrice D^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que $A^n = PD^nP^{-1}$.
(4) Conclure.

4 Transposition.

Définition 7. *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*. La* transposée *de* A *est la matrice* ${}^tA = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *où*

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!],\ a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

☞ La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exercice 12. Calculer la transposée de chacune des matrices de l'Exercice 1.

Proposition 10 (Propriétés de la transposition)**.** On a

(1) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t\,{}^tA = A.$
(2) ⚠ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda\,{}^tA + {}^tB.$
(4) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}.$
(5) L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ A = {}^tA\}$ est l'ensemble des *matrices symétriques* d'ordre n (parfois noté $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$).
(6) L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ A = -{}^tA\}$ est l'ensemble des *matrices anti-symétriques* d'ordre n.

Exercice 13. Vérifier la deuxième formule sur les matrices B et E de l'Exercice 1.

Exercice 14. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

5 Autres exercices

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Exercice 16. Soient les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2 et B^2 puis conjecturer une formule pour A^n et B^n ($n \in \mathbb{N}^\star$) à démontrer par récurrence.

Exercice 17. On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - I_3.$$

(1) Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
(2) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. On considère les trois matrices suivantes.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer AB puis AC. La matrice A est-elle inversible?
(2) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

Exercice 19. Pour chacune des matrices suivantes, préciser si elles sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse (par la méthode du pivot de Gauss).
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. (Edhec 1993)

L'objection de l'exercice est de résoudre une équation matricielle, c'est à dire de trouver toutes les matrices $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Z^2 = A$, où A est une matrice de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, \qquad 0 < a < 1.$$
Dans toute la suite, on désigne par P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer P^2 puis P^4. Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.
(2) Montrer que la matrice $D_a = P^{-1}AP$ est diagonale.
(3) Soit $Y = P^{-1}ZP$.
    (a) Montrer que l'équation $Z^2 = A$ est équivalente à l'équation $Y^2 = D_a$.
    (b) On pose alors $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
        (i) Écrire le système de quatre équations *à* quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent à $Y^2 = D_a$.
        (ii) Montrer (par l'absurde) qu'aucune solution ne vérifie $x + t = 0$.
    (c) En déduire que l'équation $Z^2 = A$ admet 0, 2 ou 4 solutions, selon que $a < 1/2$, $a = 1/2$ ou $a > 1/2$.
    (d) Donner les quatre solutions de l'équation dans le cas où $a = 5/8$.

Exercice 21. (EN Vétérinaire 1997)

Première Partie

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 3.

(1) On pose $J = M - I$.
   (a) Calculer J^2 en fonction de J.
   (b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que pour tout entier naturel n on ait:
$$M^n = I + u_n J.$$
   (c) Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 1/3$. Montrer que (v_n) est géométrique. En déduire u_n en fonction de n.

(2) Écrire M^n pour tout entier naturel n.

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C (petits, moyens et gros).

- Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/2, 1/4 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/2 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/4 et 1/2.
- Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.
   (b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.

(2) On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des question précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 22. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $J(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(1) En utilisant la formule du binôme, déterminer $J(a,b)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(2) On s'intéresse à la suite (v_n) à récurrence linéaire d'ordre 3 suivante
$$\begin{cases} v_0 = 0,\ v_1 = 0,\ v_2 = 1 \\ v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \end{cases}.$$
L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression du terme général de (v_n). On pose alors $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 2$,
$$V_{n+1} = AV_n.$$
(b) En déduire V_n en fonction de A, de n et de V_2.
(c) On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
(d) Montrer que
$$A = PJ(1,-3)P^{-1}$$
En déduire A^n.
(e) Conclure.

Exercice 23. (D'après **EML 2005**)
On considère les trois matrices suivantes
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(1) Calculer J^2, JK, KJ et K^2.
(2) On pose $L = I + J$.
(a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
(b) Montrer que L est inversible et que, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a encore $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
(c) Exprimer, pour $n \in \mathbb{Z}$, L^n en fonction de I, L, L^2 et n.
(3) On introduit maintenant les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et expliciter P^{-1}.
(b) Montrer que $P^{-1}AP = L$.
(c) Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer A^n en fonction de I, A, A^2 et n.

Exercice 24. (Puissances de matrices, 3 méthodes). On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire A_n en fonction de n, de trois manières différentes.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
(1) **Formule du binôme**.
(a) On introduit la matrice N définie par
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer N^2 et exprimer le résultat en fonction de N. En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de N^n.
(b) Exprimer A en fonction de N et I_3.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que

$$A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2)^{n-k}\right) N.$$

(d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(2) **Polynôme annulateur et division euclidienne.**
  (a) Vérifier que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.
  (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
  (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(3) **Matrice diagonale.**
  (a) Vérifier que la matrice P, définie ci-dessous, est inversible et calculer P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

  (b) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Calculer D^n en fonction de n.
  (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(4) **Application.** On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies pars

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 3, \qquad z_0 = 2$$

et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -2x_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= -2z_n \end{cases}.$$

Déterminer l'expression du terme général de chacune des trois suites.