

---

# Chapitre 9. Fonctions réelles d'une variable réelle I - Continuité

Ce chapitre présente, en plus de résultats bien connus mais énoncés ici avec rigueur, les outils nécessaires à l'étude *qualitative* des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle, ainsi que des applications importantes (notamment pour l'étude des suites récurrentes ou implicites). Dans tout le chapitre, on considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1 Préliminaires : limites

Les définitions rigoureuses des limites pour les fonctions sont des versions analogues à celles pour les suites, introduites au Chapitre 2.

Beaucoup des résultats présentés dans cette section (voire dans tout le chapitre) intègrent des conditions qui doivent être vérifiées "au voisinage de  $x_0$ ". L'étude des limites d'une fonction en un point est une étude **locale**, on s'intéresse à ce qu'il se passe *très proche* de ce point. Ainsi, les informations nécessaires ne concernent que la fonction "autour" de  $x_0$ . Un **voisinage** de  $x_0$  est alors défini comme tout intervalle ouvert (de taille arbitrairement petite) contenant  $x_0$  (on peut même ajouter la condition qu'il soit centré en  $x_0$ ).

On considère donc  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$  (on inclut la possibilité que  $f$  ne soit pas définie en  $x_0$ ).

**Définition 1** (Limite finie en  $x_0$ ).

Soit  $l$  un nombre réel. Dire que  $f$  possède  $l$  pour limite en  $x_0$  signifie que  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $l$  dès que  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ .

### TRADUCTION MATHÉMATIQUE :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Le nombre  $l$  s'appelle la limite de  $f$  en  $x_0$ . On note alors  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ .

*Exemple.*

- (1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x - 1$  et  $x_0 = 1$ . Alors quand  $x$  se rapproche de 1,  $f(x)$  se rapproche de  $f(1) = 3$ .

- (2) Par contre, il ne faut pas penser qu'en général  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On constate que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq f(0)$ .

**Définition 2** (Limite infinie en  $x_0$ ).

- (1) Dire que  $f$  possède  $+\infty$  pour limite en  $x_0$  signifie que  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut dès que  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ .

**TRADUCTION MATHÉMATIQUE :**

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \geq A$$

- (2) Dire que  $f$  possède  $-\infty$  pour limite en  $x_0$  signifie que  $f(x)$  est aussi petit que l'on veut dès que  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$ .

**TRADUCTION MATHÉMATIQUE :**

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) \leq A$$

*Exemple.*

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(|x|) = -\infty$

(2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]2, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{3}{2-x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ .

Il est possible que  $f$  ne soit pas définie "tout autour" de  $x_0$ , ou bien que son expression soit différente selon la position de  $x$  par rapport à  $x_0$ . Ainsi, on introduit la notion de limite à gauche ou à droite.

**Définition 3** (Limite à gauche en  $x_0$ ).

Même définition mais en remplaçant «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  » par «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  et  $x < x_0$  ».

**Définition 4** (Limite à droite en  $x_0$ ).

Même définition mais en remplaçant «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  » par «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  et  $x > x_0$  ».

☞ Une fonction admet une limite en  $x_0$  si et seulement si elle admet à la fois une limite à droite et à gauche en  $x_0$  et qu'elles sont égales.

*Exemple.*

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$  et la fonction partie entière n'admet pas de limite en 1.

(2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . On a alors

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} -1} f(x) = +\infty.$$

**Définition 5** (Limite en  $+\infty$ ).

Même définition mais en remplaçant «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  » par «  $x$  est suffisamment grand ».

**Définition 6** (Limite en  $-\infty$ ).

Même définition mais en remplaçant «  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  » par «  $x$  est suffisamment petit ».

*Exemple.*

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$

☞ Les conséquences graphiques de limites infinies en un point ou de limites finies à l'infini (asymptotes) on déjà été mentionnées au Chapitre 1 (ainsi que plus généralement l'étude des branches infinies). On pourra relire le paragraphe correspondant pour se rafraîchir la mémoire.

## Résultats généraux sur les limites

Les tableaux regroupant les résultats concernant les opérations sur les limites (somme, produit, inverse, quotient) ont été donnés dans le tout premier chapitre et on choisit donc de les omettre ici (tout comme les limites usuelles de fonctions usuelles - y compris résultats de croissances comparées). En revanche, on énonce toute une série de résultats généraux importants.

**Théorème 1.** Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres réels ou  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

$f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  et  $g$  une fonction définie au voisinage de  $b$ .

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

*Exemple.*

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x+4}{x+5}} = \sqrt{2}.$

**Proposition 1** (Prolongement des inégalités).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant toutes deux une limite en  $x_0$  et telles que

$$\text{au voisinage de } a, \quad f(x) \leq g(x).$$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

⚠ **Attention.** Si éventuellement, au voisinage de  $a$ ,  $f(x) < g(x)$ , alors l'inégalité portant sur les limites reste large! Par exemple,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad 1 - \frac{1}{x} < 1 \quad \text{mais} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

**Proposition 2** (Théorème d'encadrement dit *des gendarmes*).

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $D$  telles que

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

On suppose de plus que  $f$  et  $g$  admettent une limite finie en  $x_0$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ .

Alors la fonction  $h$  admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ .

*Exemple.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x+1} = 1.$$

**Proposition 3** (Théorème de comparaison).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que

$$\text{au voisinage de } a, \quad f(x) \leq g(x)$$

- (i) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .  
 (ii) Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

Enfin, le dernier résultat établit un lien entre sens de variation et existence de la limite.

**Théorème 2** (Théorème de la limite monotone).

Si  $f$  est une fonction monotone sur  $]a, b[$ , avec  $a$  et  $b$  réels ou infinis, alors

- $f$  admet en tout point de l'intervalle  $]a, b[$  une limite finie à droite et à gauche (non forcément égales);
- $f$  possède une limite finie ou infinie en  $a$  et  $b$ .

Plus précisément,

	$f$ croissante	$f$ décroissante
$f$ majorée	$f$ admet une limite finie en $b^-$	$f$ admet une limite finie en $a^+$
$f$ non majorée	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
$f$ minorée	$f$ admet une limite finie en $a^+$	$f$ admet une limite finie en $b^-$
$f$ non minorée	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$

## 2 Continuité

### 2.1 Continuité en un point

**Définition 7.** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $x_0$  si  $f$  est définie en  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

☞ Si  $f$  n'est pas continue en  $x_0$ , on dit que  $f$  est **discontinue** en  $x_0$  ou que  $x_0$  est un **point de discontinuité** de  $f$ .

**Définition 8.** Sous les mêmes hypothèses que précédemment :

- On dit que  $f$  est **continue à gauche** en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est définie en  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .
- On dit que  $f$  est **continue à droite** en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est définie en  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

**Proposition 4.** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

- (1) Si  $x_0$  n'est pas une extrémité de  $I$ , alors on a l'équivalence :  
 $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est continue à gauche et à droite en  $x_0$ .
- (2) Si  $x_0$  est l'extrémité gauche (resp. droite) de  $I$ , alors on a l'équivalence :  
 $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est continue à droite (resp. à gauche) en  $x_0$ .

**Exercice 1.**

- (1) Étudier la continuité en 3 de la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in [0, 3[ \cup ]3, +\infty[ \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

- (2) Étudier la continuité en 0 de la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Définition 9.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in I$  et soit  $f$  définie sur  $I \setminus \{x_0\}$ . On dit que  $f$  est **prolongeable par continuité** en  $x_0$  lorsque  $f$  admet une limite finie en  $x_0$ . L'application

$$\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est appelée le **prolongement par continuité** de  $f$  en  $x_0$ .

**Remarque 1.**

- La fonction  $\tilde{f}$  est évidemment continue en  $x_0$
- Par abus de notation, la fonction  $\tilde{f}$  est parfois notée  $f$ .
- On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.

**Exercice 2.**

- (1) La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  est-elle prolongeable par continuité en 0?
- (2) La fonction  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x \ln(x)$  est-elle prolongeable par continuité en 0?
- (3) La fonction  $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  est-elle prolongeable par continuité en 0?

## 2.2 Continuité et limite des suites

La continuité d'une fonction en un point, précédemment définie à l'aide des quantificateurs, peut se reformuler à l'aide des suites. Dire qu'on se rapproche arbitrairement de  $a$  peut se faire à l'aide d'une suite dont la limite est  $a$ . Plus précisément, on a le résultat suivant:

**Théorème 3** (Caractérisation séquentielle de la continuité).

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $f$  est continue en  $a$ ;
- Pour toute suite numérique  $(a_n)$  (dont les termes appartiennent au voisinage de  $a$  à partir d'un certain rang) qui converge vers  $a$ , on a que la suite  $(f(a_n))$  converge vers  $f(a)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

## 2.3 Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues

**Définition 10.** On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

**Proposition 5** (Opérations sur les fonctions continues). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage d'un point  $x_0$ , élément d'un intervalle  $I$ .

- (1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  (resp. sur  $I$ ), alors  $f + g$ ,  $f \times g$  et  $\lambda f$  sont continues en  $x_0$  (resp. sur  $I$ );
- (2) Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  et que  $g(x_0) \neq 0$  (resp. continues sur  $I$  et que  $g(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ ), alors  $1/g$  et  $f/g$  sont continues en  $x_0$  (resp. sur  $I$ ).
- (3) Si  $f$  est continue en  $x_0$  et que  $g$  est (définie au voisinage de et) continue en  $f(x_0)$ , alors,  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

Le dernier point de la proposition précédente est un cas particulier du résultat plus général suivant:

**Proposition 6.** Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et si  $g$  est continue sur un intervalle  $J$  tel que  $f(I) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

*Exemple.* La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(1 + x^2)$$

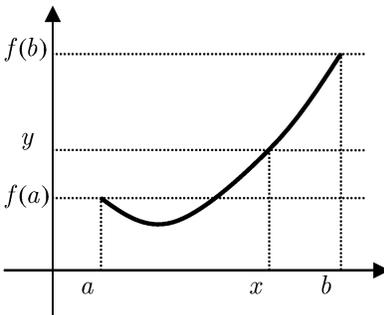
est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

**Théorème 4** (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors pour tout réel  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $x \in [a; b]$  tel que  $f(x) = y$ .



☞ L'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .

**Corollaire 1.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle; si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

⚠ **Attention.** Les intervalles  $I$  et  $f(I)$  ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple, si  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , alors  $f(\mathbb{R}) = ]0; 1]$ .

**Proposition 7.**

- (1) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  telle que  $f(a) \times f(b) \leq 0$  alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $[a; b]$ .
- (2) Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

☞ Ce résultat est à la base du principe de *dichotomie* que nous utiliserons avec SciLab pour trouver des approximations de solutions de  $f(x) = 0$ .

**Exercice 4.** Montrer que l'équation  $xe^x = 1$  admet (au moins) une solution dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

On a vu que, de manière générale, la continuité ne préservait pas la nature d'un intervalle. Si cet intervalle est fermé borné, c'est par contre le cas.

Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle de la forme  $[a; b]$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 8.** L'image d'un segment par une fonction continue est un segment; si  $f$  est continue sur un segment  $[a; b]$ , alors  $f([a; b]) = [m; M]$  est un segment.

⚠ Les extrémités du segment image ne sont pas forcément les images des extrémités de  $[a; b]$ .

**Proposition 9.**

- (1) Si  $f$  est une fonction continue et croissante sur un segment  $[a; b]$ , alors  $f([a; b]) = [f(a), f(b)]$ .
- (2) Si  $f$  est une fonction continue et décroissante sur  $[a; b]$ , alors  $f([a; b]) = [f(b), f(a)]$ .

☞ Dans la Proposition 8,  $m$  est le minimum de la fonction sur  $[a; b]$  et  $M$  son maximum. On note

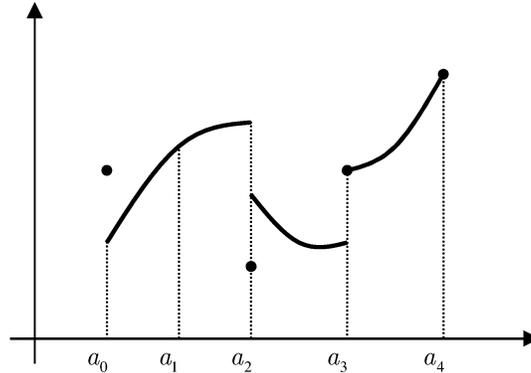
$$m = \min_{[a; b]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[a; b]} f.$$

**Théorème 5.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ , alors  $f$  est bornée sur  $[a; b]$  et atteint ses bornes.

## 2.5 Fonctions continues par morceaux

**Définition 11.** Une fonction  $f$  est dite *morceaux* sur le segment  $[a; b]$  si il existe une subdivision  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  telle que la restriction de  $f$  à chaque intervalle ouvert  $]a_i; a_{i+1}[$  admette un prolongement continu à l'intervalle fermé  $[a_i; a_{i+1}]$ . Plus précisément, si

- $f$  est continue sur chaque  $]a_i; a_{i+1}[$ ;
- $f$  admet une limite à droite et à gauche (non nécessairement égales et potentiellement distinctes de la valeur de  $f$ ) en chaque  $a_i$ .



☞ Les fonctions "en escalier" (et notamment la fonction partie entière) sont des fonctions continues par morceaux.

**Proposition 10.** Soient  $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues par morceaux et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\lambda f$ ,  $f + g$ ,  $fg$  et  $|f|$  sont continues par morceaux.

**Exercice 5.** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. Montrer que  $f$  est bornée sur  $[a; b]$ .

## 2.6 Théorème de la bijection

**Proposition 11.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

Si la fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ , alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

Autrement dit, l'équation  $f(x) = k$  d'inconnue  $x$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[a, b]$ .

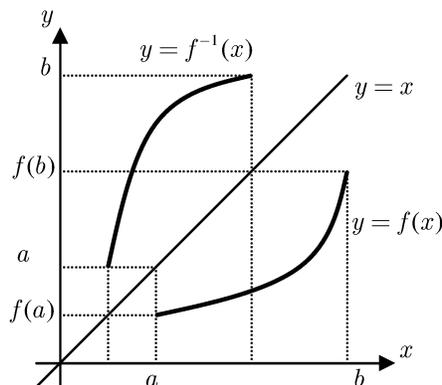
**Exercice 6.** Montrer que l'équation  $x^3 + x = 3$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1, 2]$ .

**Théorème 6** (de la bijection).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application **continue** et **strictement monotone** sur  $I$ . Alors,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur son image  $f(I)$ . En particulier,

- $f(I)$  est un intervalle, noté  $J$
- $f : I \rightarrow J$  est une bijection de  $I$  sur  $J$
- $f^{-1} : J \rightarrow I$  est strictement monotone, de même monotonie que  $f$ .
- $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue de  $J$  sur  $I$ .

☞ Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation  $\Delta : y = x$ .



**Exercice 7.** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

- (1) Démontrez que  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que vous explicitez.
- (2) Soit  $g : J \rightarrow [0, +\infty[$  l'application réciproque de  $f$ . Dressez le tableau de variation de  $g$  en précisant les limites de  $g$  aux bornes de  $J$ .
- (3) Étudiez la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

### 2.7 Application: Étude des suites implicites

Comme on l'a vu au cours du Chapitre 2 (et dans quelques exercices), une suite peut être définie implicitement, c'est à dire comme solution d'une certaine équation. Le théorème de la bijection permet d'étudier (et d'assurer l'existence des termes) de telles suites.

**Exercice 8.** (D'après **Ecricome 1996**)

On considère l'équation  $(E_n) : \ln(x) + x = n$  et la fonction  $f : x \mapsto \ln(x) + x$ .

- (1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $(E_n)$  admet une unique solution  $x_n$ . Montrer alors que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.
- (3) (a) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x) < x$ .  
 (b) En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$ .  
 (c) En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .
- (4) Montrer que  $\frac{\ln(x_n)}{n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . En déduire que  $\frac{x_n}{n} \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow +\infty$ .

## 3 Autres exercices

**Exercice 9.** Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x) + 7}{x^2 + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminer les limites à droite suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

**Exercice 10.** (DM 11, Hiver 2016)

- (1) Discuter en fonction des paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  si la fonction  $f$  suivante, définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , se prolonge à  $\mathbb{R}$  tout entier.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(e^{x-1} - 1)}{x - 1}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{6x - 5} - b}{x - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

- (2) Soient  $a, b > 0$ . Étudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor, \quad x \mapsto \lfloor \frac{x}{a} \rfloor \frac{b}{x}.$$

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , minorée par 1 et majorée par 2. Étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xf(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} xf(x).$$

**Exercice 12.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ .

- (1) Étudier la continuité de  $f$  en 0.
- (2) Montrer que  $f(x + 1) = f(x) + 1$ .
- (3) En déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13.** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une fonction continue. Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.

**Exercice 14.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .

**Exercice 15.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(x/2^n)$ , montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 16.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - 2 + \ln(x)$ .

- (1) Montrer que  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle à déterminer.
- (2) Montrer que la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 1$ .

**Exercice 17.** On considère la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ .

- (1) (a) Étudiez les variations de  $f$ , ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition. Présentez ces résultats sous la forme d'un tableau de variation.  
(b) Montrez que  $f$  induit une bijection, notée  $\tilde{f}$  de  $]0, 1/2[$  sur  $]0, \sqrt{2/e}]$ . Dressez le tableau de variations de l'application réciproque  $g$  de  $\tilde{f}$ .
- (2) (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier supérieur ou égal à 2. Démontrez que l'équation

$$2\sqrt{x}e^{-x} = \frac{1}{n}$$

admet une unique solution dans  $]0, 1/2[$ , notée  $a_n$ .

- (b) Montrez que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.
- (c) En déduire que  $(a_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 18.** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, telle que  $f(0) = f(1)$ .

- (1) On veut montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation  $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$  admet au moins une solution. Soit  $n \geq 1$ . On pose, pour  $x \in [0; 1 - \frac{1}{n}]$ ,  $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ .

- (a) Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ .
- (b) Conclure.

- (2) *Application.* Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
- (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
- (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.

**Exercice 19.** (Extrait **ECRICOME 2001**, DM 12 Hiver 2016)

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction  $f_n$ , de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} - a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a.$$

- (1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend  $a = \frac{11}{6}$  et  $n = 1$ .
- (a) Expliciter  $f_1$  et dresser son tableau de variations.
- (b) Calculer  $f_1(1)$ , puis déterminer les racines de  $(E_1)$ , après avoir écrit l'expression de  $f_1$  sous la forme d'une fraction dont on aura factorisé le dénominateur.
- (2) **Dénombrément des racines de  $(E_n)$ .**
- (a) Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .
- (b) Justifier l'existence de racines de l'équation  $(E_n)$  et en déterminer le nombre.
- (3) **La plus grande des racines.** On note  $x_n$  la plus grande des racines de  $(E_n)$ .
- (a) Justifier que  $x_n > 0$ .
- (b) Démontrer que pour tout réel  $x > 1$

$$\frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1} < \frac{1}{x-1}.$$

- (c) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln \left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$

puis, que

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

- (d) En utilisant l'inégalité de droite, montrer que pour tout  $n$  entier naturel non nul, on a

$$x_n > \frac{2n}{\exp a - 1}.$$

- (e) Quelle est la limite de  $x_n$ , puis la limite de  $\ln \left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
- (f) En déduire que le quotient de  $x_n$  par  $\frac{2n}{e^a - 1}$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 20.** (D'après **EDHEC 1997**, DS 3 Hiver 2016)

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f_n(x) = x - n \ln(x).$$

(1) **Étude de  $f_n$ .**

(a) Étudier  $f_n$  et dresser son tableau de variations.

(b) Montrer qu'il existe deux réels  $u_n$  et  $v_n$ , seules solutions de  $f_n(x) = 0$ , et tels que

$$0 < u_n < n < v_n.$$

(2) **Étude de  $(u_n)_{n \geq 3}$ .**

(a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $1 < u_n < e$ .

(b) Montrer que  $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$  et en déduire que  $(u_n)$  est décroissante.

(c) Justifier que  $(u_n)$  converge et, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, déterminer sa limite.

(d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1, \quad \text{puis que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 1}{1/n} = 1.$$

(3) **Étude de  $(v_n)_{n \geq 3}$ .**

(a) Déterminer la limite de  $(v_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(b) Calculer  $f_n(n \ln(n))$ . En déduire que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $n \ln(n) < v_n$ .

(c) On introduit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $g(x) = x - 2 \ln(x)$ . Étudier  $g$  et donner son signe. En déduire que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $2 \ln(n) < n$ .

(d) En déduire le signe de  $f_n(2n \ln(n))$  puis établir que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $v_n < 2n \ln(n)$ .

(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1.$$

**Exercice 21.** (D'après **ESCP 1998**, DS 3 Hiver 2016)

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) Étudier, suivant la parité de  $n$ , le tableau de variations de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(b) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

(c) Calculer  $f_n(1)$  et en déduire, suivant la parité de  $n$ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x$

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On introduit les deux matrices  $A$  et  $D$  définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice  $P$  telle que  $AP = PD$ , où  $P$  de la forme  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ .

(b) Montrer que  $P$  est inversible et en déduire  $D$  en fonction de  $A$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue  $X$  matrice carrée de taille 2

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

- (a) En posant  $Y = P^{-1}XP$ , montrer que  $X$  solution de  $(E_n)$  est équivalent à  $Y$  solution de

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

- (b) Soit  $Y$  une solution de  $(E'_n)$ . On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (i) Montrer que, si  $Y$  solution de  $(E'_n)$ , alors  $Y$  et  $D$  commutent.
  - (ii) En déduire que  $b = c = 0$ .
  - (iii) Quelles sont les valeurs possibles de  $a$ ?
  - (iv) Discuter, suivant les valeurs de  $n$ , le nombre de solutions de l'équation  $(E_n)$ .
- (c) On note  $\alpha$  la solution négative de l'équation numérique  $x^4 + x^3 = 2$ . Déterminer les solutions de l'équation  $(E_3)$  à l'aide de  $\alpha$ .