Chapitre 14

Compléments

Exercice 1. (D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier non nul. On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le numéro de la boule obtenue au $k-$ième tirage. Pour tout entier naturel non nul k, on note S_k la somme des numéros des boules obtenus lors des k premiers tirages:

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Partie A

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
(2) (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
 (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
 (c) Montrer que

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

(3) Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
(4) Dans cette question, $n = 3$. Déterminer la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

(5) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
(6) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
 (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.
 (b) En utilisant un système complet d'évènements liés à la variable aléatoire S_k, démontrer que

$$\forall i \in [\![k+1; n]\!], \qquad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

(7) (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
 (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition:

$$\forall i \in [\![k;n]\!], \qquad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

(8) (a) Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Comparer les évènements $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$,

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

(9) Démontrer que $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$ puis que

$$E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

(10) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n).$$

(11) On rappelle qu'en langage `SciLab`, l'instruction `grand(1,1,'uin', 1, n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1;n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne et simule la variable aléatoire T_n.

```
function y=T(n)
    S=.........................................
    y=.........................................
    while .....................................
        tirage=grand(1,1,'uin', 1, n);
        y=.....................................
    end
endfunction
```