Interro Express n°1

Solution

Exercice 1. On applique les règles de calcul rappelées dans le premier chapitre. On constate notamment que, comme $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, alors

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + \frac{4}{5} < \lfloor x \rfloor + 1$$

et par conséquent

$$\left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{4}{5} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{9 \times (-3)^{2n}}{3^{n+3}} + (-1)^n \times (-3)^{n-1} &= \frac{3^2 \times (-1)^{2n} \times 3^{2n}}{3^{n+3}} + (-1)^{n+n-1} \times 3^{n-1} \\ &= 3^{2n+2} \times 3^{-n-3} - 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1} - 3^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. Pour que la fonction f soit définie, il faut (et il suffit) que l'argument de la racine soit positif ou nul et que le dénominateur de s'annule pas, ce qui se résume par

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\iff |x| - 2 > 0 \\ &\iff x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

Pour la fonction g, il faut déterminer le signe de la quantité en argument du logarithme et s'assurer qu'elle est strictement positive. On commence par factoriser (via calcul du discriminant) le polynôme du second degré

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$$

Ainsi,

$$(x-1)(2x^2 - x - 1)x^2 > 0 \iff x^2(x-1)^2(2x+1) > 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

ou encore

$$\mathcal{D}_g = \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Exercice 3. Cette inégalité est très très classique et repose sur une étude (facile) de fonction. Posons $h(x) = e^x - x - 1$. La fonction h est définie et dérivable (comme combinaison de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$. Les limites ne posent pas de difficulté:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{car} \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \qquad \text{par croissance comparée.}$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$ dont il est immédiat de déterminer le signe et par conséquent les variations de h:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On constate alors que h présente un minimum en 0, égal à 0. En particulier, pour tout x réel, $h(x) \geq 0$, ceci est bien équivalent à l'inégalité que l'on souhaitait montrer et termine donc la démonstration.

Exercice 4. On commence par observer que la limite de φ en $+\infty$ est bien $+\infty$:

$$\frac{2x^3 - \ln(x^2)}{x^2+1} = \frac{2x^3 - 2\ln(x)}{x^2+1} = \frac{x^3\left(2 - \frac{\ln(x)}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(2 - \frac{\ln(x)}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il faut donc calculer la limite, toujours en $+\infty$, de $\varphi(x)/x$. D'après le calcul précédent, on a

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{2 - \frac{\ln(x)}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

La courbe de φ "part donc dans la direction de la droite d'équation $y = 2x$". Il reste donc à savoir si on a une asymptote oblique ou si la branche est parabolique. Pour cela, on regarde la limite de la distance entre la courbe et la droite.

$$\varphi(x) - 2x = \frac{2x^3 - 2\ln(x)}{x^2+1} - 2x = \frac{2x^3 - 2\ln(x) - 2x^3 - 2x}{x^2+1} = \frac{-2x - 2\ln(x)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-2 - 2\frac{\ln(x)}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la courbe représentative admet une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = 2x$.

Remarque. On pourrait aussi montrer la présence d' une asympote verticale en 0 et que la droite $y = 2x$ est également asymptote en $-\infty$.