Interro Express n°2

Solution

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**.*

Exercice 1. On résout avec la méthode du Pivot de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 6x & + & 7y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ & - & 2y & - & z & = & -1 \\ & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \frac{1}{2}(1-y) \\ z & = & 1-2y \end{array}\right.$$

Ainsi, il y a une infinité de solutions (on a choisi de laisser la variable y libre):

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}(1-y), y, 1-2y \right) : \ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & - & t & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2 \\ & - & 2y & + & z & - & 2t & = & -3 \\ & - & 2y & - & 2z & - & 3t & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & 2z & & & = & 3 \\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & 4z & - & t & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & & & t & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & 1 \\ & & y & & & & & = & -2 \\ & & & & z & & & = & -1 \\ & & & & & & t & = & 3 \end{array}\right.$$

donc (le système est de Cramer et) l'ensemble des solutions est réduit à

$$\mathcal{S} = \{(1, -2, -1, 3)\}.$$

Exercice 2.

(1) On montre que la différence est négative, en utilisant l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} < 0,\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

(2) Afin de montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, il faut vérifier les quatre critères définissant de telles suites. On commence par évaluer $a_n - b_n$ afin de savoir laquelle est deux suites est supérieure à l'autre:

$$\begin{aligned}a_n - b_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n+1} \\ &= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $a_n \geq b_n$. Il reste à montrer que $a_n - b_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante. Pour la première condition, on observe que

$$\begin{aligned}a_n - b_n &= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

d'après la première question de l'exercice. Ainsi, (a_n) est décroissante. La croissance de (b_n) se montre de manière totalement analogue et on omet le détail ici. Au final, les deux suites sont bien adjacentes. On peut en conclure (bien que ce n'était pas demandé) que, par le théorème du même nom, les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 3. Notons L les amateurs de Léonard Cohen (le texte donnant donc $\#L = 56$), D les fans de Bowie ($\#D = 71$) et J les personne à l'oreille déficiente ($\#J = 6$). Le texte nous donne en plus les informations suivantes:

$$\#(D\cup L\cup J) = 83, \quad \#(D\cap L) = 45, \quad \#(D\cap J) = 4 \text{ et } \#(J\cap L) = 2.$$

(1) On cherche $\#(J\cap L\cap D)$. D'après la formule du crible, on a

$$\begin{aligned}\#(J\cap L\cap D) &= \#(D\cup L\cup J)-\#J-\#L-\#D+\#(D\cap L)+\#(D\cap J)+\#(J\cap L) \\ &= 83-6-56-71+45+4+2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Il n'y a qu'une seule personne de ce groupe qui aime les trois chanteurs à la fois.

(2) On cherche exactement $\#(D \cap L \cap \overline{J})$. Mais on sait que

$$(D \cap L \cap \overline{J}) \cup (D \cap L \cap J) = D \cap L$$

et que cette union est disjointe. Ainsi,

$$\begin{aligned} \#(D \cap L \cap \overline{J}) &= \#(D \cap L) - \#(D \cap L \cap J) \\ &= 45 - 1 \\ &= 44. \end{aligned}$$