ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Interro Express n°3

Durée: 40 minutes

Exercice 1.

(1) On vérifie en calculant les puissances de A:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3.$$

En particulier, $A^3 - A^2 - 2A = 0$, ou encore $A\left(A^2 - A - 2I\right) = 0$. Or, si le produit de deux matrices non nulles est nul, aucune de ces deux matrices ne peut être inversible et A n'est donc pas inversible.

(2) On utilise l'algorithme du pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

Ainsi, l'algorithme se poursuit jusqu'au bout (il y a bien 3 pivots non nuls) donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) On constate que D est diagonale. En effet,

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Comme on l'a déjà vu dans différents exercices précédents, on découpe la matrice dont on cherche à calculer la puissance comme somme de deux matrices **qui commutent** et dont le calcul des puissances est "simple". Ici, on constate que

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$$

La matrice D est diagonale et on sait donc calculer D^n. La matrice N est *nilpotente*, on remarque facilement que $N^2 = 0$ et par conséquent $N^k = 0$, pour tout entier $k \geq 2$. De plus les matrices commutent:

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme:

$$\begin{aligned} M^n &= (D+N)^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$