ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus vraiment Express) n°4

Durée: 55 minutes

Exercice 1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$(E_n) \qquad e^x + x^n = 4$$

et la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = e^x + x^n$.

(1) Montrer que f_n réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle à préciser. En déduire que (E_n) admet une unique solution sur $[0; +\infty[$ que l'on notera u_n.
(2) Montrer que $u_n > 1$.
(3) Montrer que $f_n(u_{n+1}) < 4$. En déduire le sens de variation de (u_n).
(4) Montrer que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.
(5) Montrer, par l'absurde, que $\ell = 1$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
(2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et, à l'aide d'un développement limité d'ordre 1, montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(3) Après avoir étudié la fonction $x \mapsto (2x^2 - 1)e^{x^2} + 1$, déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
(4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 puis, donner un développement limité à l'ordre 1 de f^{-1} en 0.