ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus vraiment Express) n°4

Solution

Exercice 1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$(E_n) \qquad e^x + x^n = 4$$

et la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = e^x + x^n$.

(1) La fonction est clairement dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de deux telles fonctions usuelles. On a $f_n'(x) = e^x + nx^{n-1} > 0$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, f_n est strictement croissante:

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n		$\nearrow$	$+\infty$
	1		

Comme f_n est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection (grâce au théorème du même nom) de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$. Comme, de plus, $4 \in [1; +\infty[$, 4 admet un unique antécédent par f_n, ou encore (E_n) admet une unique solution (dans $[0; +\infty[$) que l'on note u_n et qui vérifie naturellement (par définition)

$$e^{u_n} + u_n^n = 4.$$

(2) On voit immédiatement que $f_n(1) = e + 1 < 4 = f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement croissante, il est alors clair que $u_n > 1$.

(3) Utilisant que

$$e^{u_{n+1}} + u_{n+1}^{n+1} = 4 \iff e^{u_{n+1}} = 4 - u_{n+1}^{n+1},$$

on peut évaluer

$$f_n(u_{n+1}) = e^{u_{n+1}} + u_{n+1}^n = 4 - u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1}^n = 4 + u_{n+1}(1 - u_{n+1}).$$

Or, $u_{n+1} > 1$, donc la quantité précédente est strictement inférieure à 4. Comme f_n est strictement croissante, il suit que $u_n > u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

(4) La suite étant décroissante et minorée (par 1), le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers un réel ℓ. Comme $u_n > 1$ pour tout n, on a de plus $\ell \geq 1$.

(5) On sait que

$$e^{u_n} + u_n^n = 4 \iff u_n^n = 4 - e^{u_n}.$$

Si $\ell > 1$,

$$u_n^n = \exp(n \ln(u_n)) \longrightarrow +\infty, n \to +\infty$$

alors que $4 - e^{u_n} \longrightarrow 4 - e^{\ell}$, (car exp est continue) entrainant une contradiction. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(1) Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux telles fonctions dont le numérateur ne s'annule pas. Le problème est donc uniquement en 0. On va alors vérifier que f dérivable en 0, puis que f' est continue en 0. Le taux d'accroissement de f en 0 vaut

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} \longrightarrow 1,\ x \to 0,$$

(c'est la limite usuelle $(e^u-1)/u$ en 0 obtenue justement comme limite du taux d'accroissement de exp en 0). Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. Par ailleurs, si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}.$$

C'est alors grâce au développement limité de exp en 0 que l'on peut calculer la limite de $f'(x)$ en 0. En effet, pour x proche de 0,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$

et il suit qu'on peut écrire (en intégrant au reste toute quantité qui, factorisée par x^2 tend encore vers 0)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2-1)(1+x^2+o(x^2))+1}{x^2} = \frac{2x^2-1-x^2+o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1) \longrightarrow 1 = f'(0),\ x \to 0 \end{aligned}$$

et f' est alors continue en 0. Il suit que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Notons $h : x \mapsto (2x^2-1)e^{x^2}+1$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $h'(x) = (4x^3+2x)e^{x^2} = 2x(2x^2+1)e^{x^2}$ et il est alors facile de dresser le tableau de variations de h et d'en déduire son signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Mais $h(x)$ représente, pour $x \neq 0$, le numérateur de $f'(x)$. Comme $f'(0)=1$, il suit que $f'(x) > 0$ pour tout x réel, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et f^{-1} a les mêmes variations que f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

(3) On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' ne s'annule jamais. Il suit que, par un théorème du cours, f^{-1} est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Or, comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on a $f^{-1}(0) = 0$ et $\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$. Le développement limité de f^{-1} en 0 (dont l'existence est assurée par la dérivabilité de celle-ci en 0) est alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= f^{-1}(0) + \left(f^{-1}\right)'(0)x + o(x) \\ &= x + o(x). \end{aligned}$$

(En particulier, $y = x$ est tangente à la courbe de f^{-1} en 0.)