ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus du tout Express) n°5

Mardi 14 Mars - Durée : 1h30

Exercice 1. (Accroissements Finis) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2(u_n+1)}.$$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto 1 - \frac{x}{2(x+1)}$.
(2) Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$. En déduire que $u_n \in [0;1]$, pour tout $n \geq 0$.
(3) En étudiant $g : x \longmapsto f(x) - x$, montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $[0;1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq 1/2$.
(5) Montrer - en justifiant très soigneusement toutes les étapes - que, pour tout $n \geq 0$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) Conclure quant à la convergence de (u_n).
(7) En déduire l'écriture d'un script sous `SciLab` permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 0.001 près. (On choisira une autre méthode que la dichotomie).

Exercice 2. (Séries numériques)

(1) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i) \sum_{n\geq 0} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}}, \qquad (ii) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad (iii) \sum_{n\geq 1} n \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

(2) (a) Montrer, à l'aide de l'expression conjuguée, que

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

(b) En déduire a convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Exercice 3. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$. Sa courbe, dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2cm) est notée $\mathcal{C}$ et on donne $\ln(2) \simeq 0.69$.

(1) **Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.**
  (a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.
  (b) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de f puis étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
  (c) Calculer $f"(x)$. Déterminer les points d'inflexion de la courbe.
  (d) Tracer $\mathcal{C}$. On précisera les tangentes à l'origine et aux points d'inflexion.

(2) **Étude d'une suite et d'une série associées à f.** On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, qu'elle converge et préciser sa limite.

(b) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f(x) \leq x - \frac{x^2}{2}.$$

(c) En déduire que, pour tout entier n, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

(d) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.