ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus du tout Express) n°5

Solution

Exercice 1. (Accroissements Finis) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2(u_n + 1)}.$$

(1) La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ comme combinaisons de fonctions usuelles dérivables et le dénominateur de son quotient ne s'annule jamais sur $[0:1]$. Pour $x \in [0;1]$, on a

$$f'(x) = -\left(\frac{2(x+1) - 2x}{4(x+1)^2}\right) = \frac{-1}{2(x+1)^2} < 0$$

et f est donc strictement décroissante sur $[0;1]$. On peut donc dresser le tableau de variations:

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

(2) Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 3/4$, que f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, le théorème de bijection assure qu'elle en réalise une de $[0;1]$ sur $[3/4;1]$. Or, $[3/4;1] \subset [0;1]$, donc l'intervalle est bien stable sous l'action de f. Le premier terme de la suite $u_0 = 1 \in [0;1]$, la stabilité de l'intervalle sous l'action de f et une récurrence immédiate permettent donc de voir que $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$ et que tous les termes de la suite sont donc bien des éléments de l'intervalle.

(3) Pour les mêmes raisons que f, g est dérivable sur $[0;1]$, et pour tout x dedans, on a

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

et g est strictement décroissante sur $[0;1]$ réalisant ainsi une bijection (par le théorème du même nom) de $[0;1]$ sur $[g(1); g(0)] = [-1/4; 1]$. Comme 0 est un élément de cet intervalle, il admet un unique antécédent α par g, ce qui est équivalent à $f(\alpha) = \alpha$ (c'est à dire α point fixe de f).

(4) Soit $x \in [0;1]$, ainsi $2(x+1)^2 \geq 2$ et

$$|f'(x)| = \frac{1}{2(x+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

(5) On procède par récurrence:

- Pour $n = 0$:
$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0,$$
car $\alpha \leq 1$ et l'inégalité est vérifiée.

- Supposons que l'inégalité soit vraie pour un certain $n \geq 0$. Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$. On a,
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &= |f(u_n) - f(\alpha)| && \text{(par définition)} \\ &\leq \max_{t\in[0;1]} |f'(t)||u_n - \alpha| && \text{(par l'IAF appliquée à } f \text{ sur } [0;1] \\ & && \text{dont } u_n \text{ et } \alpha \text{ sont des éléments)} \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| && \text{(par la question précédente)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} && \text{(par HR),} \end{aligned}$$
ce qu'on voulait et qui termine la récurrence.

(6) Le théorème des gendarmes implique alors que $u_n - \alpha \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$, ou encore que u_n converge vers α.

(7) L'inégalité obtenue précédemment permet non seulement de voir que u_n converge vers α mais précise aussi la vitesse de convergence. Pour que u_n soit une approximation de α à 0.001 près, il suffit que n soit tel que $(1/2)^n \leq 0.001$. Cela donne le script suivant

```
function y=f(x)
    y=1-x/(2*(x+1));
endfunction

n=0;
u=1;

while (1/2)^n > 0.001
    u=f(u);
    n=n+1;
end

disp(u, 'une approximation de alpha à 0.001 près est')
```

Exercice 2. (Séries numériques)

(1) Pour chacune des séries suivantes, on travaille sur le terme général:
$$(i)\ \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} = 2n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1}$$

et on reconnait un multiple de la première dérivée d'une série géométrique de raison $-1/7$ qui converge. Ainsi, cette première série converge et on peut calculer sa somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} &= 2\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1} \\
&= 2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{7}\right)^2} \\
&= 2\times\frac{49}{64} \\
&= \frac{49}{32}.
\end{aligned}$$

$$(ii)\ \frac{n^2-2}{n!} = \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} - \frac{2}{n!}$$

et on retrouve, via simplification des factorielles, des combinaisons de séries de terme général égal à $1/n!$, donc cette série converge également. On calcule alors sa somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= e+e-2e \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii)\ n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) &= n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sqrt{n}\times\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\longrightarrow +\infty,\ n\to+\infty
\end{aligned}$$

et la série diverge donc grossièrement.

(2) On cherche à montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(a) On multiplie par l'expression conjuguée:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or,

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq\sqrt{n} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et on a bien
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

(b) Tous les termes de la série sont positifs et $\sum n^{-3/2}$ est une série de Riemann convergente, donc, par critère de comparaison, notre série converge elle aussi.

Exercice 3. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$. Sa courbe, dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2cm) est notée $\mathcal{C}$ et on donne $\ln(2) \simeq 0.69$.

(1) **Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.**

(a) On dérive avec les formule usuelles
$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$
La dérivée de f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x=1$. La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$f(x) = x - \ln(1+x^2) = x\left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = x\left(1 - 2\frac{\ln(|x|)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x}\right)$$
et donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
Un tableau de variations faisant toujours plaisir, on ne s'en prive pas

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(b) Pour étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$, on commence par calculer la limite de $f(x)/x$. D'après l'écriture de f obtenue ci-dessus,
$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2\frac{\ln(|x|)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \longrightarrow 1,\ x \to \pm\infty.$$
Mais comme
$$f(x) - 1x = -\ln(1+x^2) \longrightarrow -\infty,\ x \to \pm\infty$$
on peut conclure que la courbe de f présente deux branches paraboliques de direction $y = x$ qu'elle regarde par en dessous dans les deux cas.

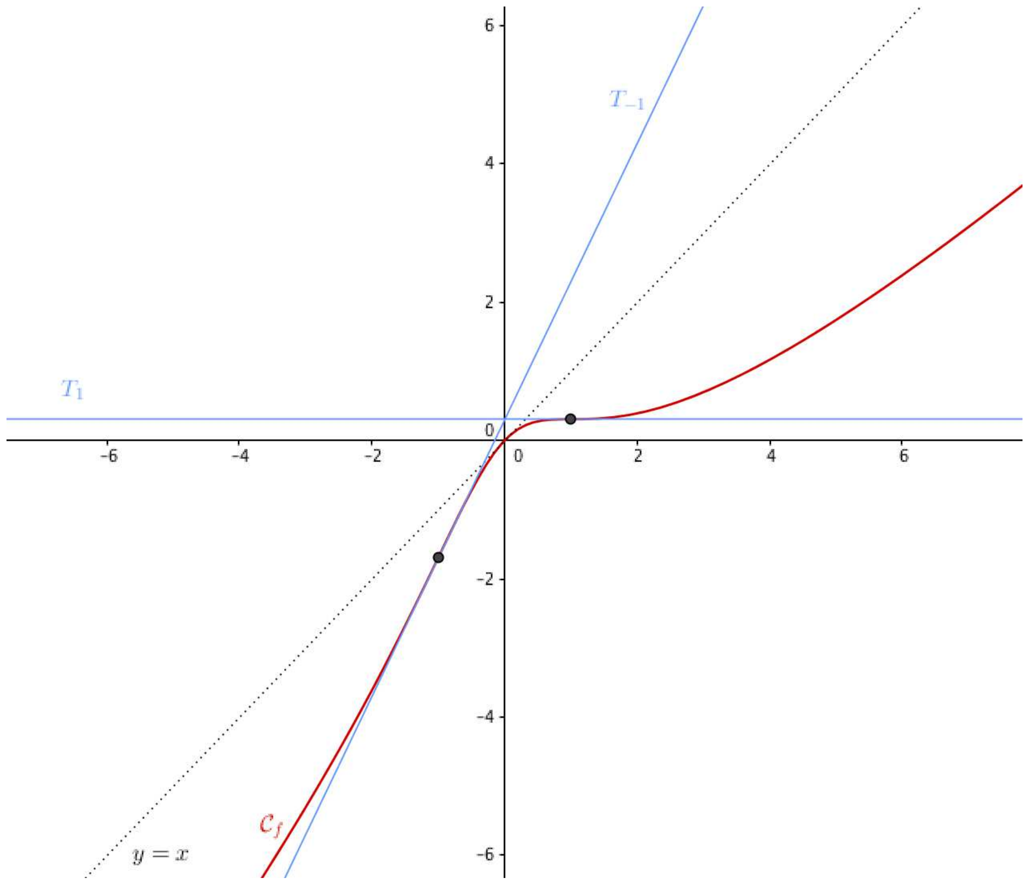
(c) Le calcul donne
$$f''(x) = \frac{-2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$
Et il est facile d'établir le tableau de signe de cette dérivée seconde

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il y a donc deux points d'inflexion $(-1; -1-\ln(2))$ et $(1; 1-\ln(2))$.

(d) Les équations des tangentes sont

$$\begin{aligned} T_0 &: \; y = f'(0)x + f(0) = x \\ T_{-1} &: \; y = f'(-1)(x+1) + f'(-1) = 2x + 1 - \ln(2) \\ T_1 &: \; y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 - \ln(2) \end{aligned}$$



(2) **Étude d'une suite et d'une séries associées à** f. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

(a) On remarque que $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$, car pour tout x réel, $1 + x^2 \geq 1$. Il suit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante. (On pouvait aussi faire une récurrence en utilisant la croissance de f). De plus, comme $f(0) = 0$ et que f est croissante, une récurrence immédiate permet de voir que (u_n) est minorée par 0. C'est vrai pour u_0 et

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 0.$$

Par convergence monotone, la suite converge vers une limite ℓ qui vérifie

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = -\ell + \ln(1+\ell^2) \\ &\iff \ln(1+\ell^2) = 0 \\ &\iff 1 + \ell^2 = 1 \\ &\iff \ell = 0. \end{aligned}$$

(b) On étudie la fonction différence:

$$g(x) = f(x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x^2).$$

Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[0;1]$ et on a

$$g'(x) = \frac{x(x^2-1)}{1+x^2}.$$

On en déduit les variations de g et son maximum, qui est nul et implique donc l'inégalité demandée:

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
g	0	$\searrow$	$g(1)$

(c) Avant d'appliquer l'inégalité précédente à u_n, il faut s'assurer que tous les termes de la suite sont bien dans $[0;1]$. Mais c'est bien sûr le cas: on a déjà la minoration par 0, et la décroissance de la suite avec un premier terme $u_0 = 1$ assure la majoration par 1. Ainsi,

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2 \Longleftrightarrow u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1}).$$

(d) On calcule la $n-$ième somme partielle

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 2\left(u_k - u_{k+1}\right) \\ &= 2\left(1 - u_{n+1}\right) \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &\longrightarrow 2,\ n \to +\infty. \end{aligned}$$

Par comparaison, la série $\sum u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq 2.$$