ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus du tout Express) n°6

Jeudi 11 Mai - Durée : 1h30

Exercice 1. (Question(s) de cours)

(1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
  (a) Préciser $X(\Omega)$ et rappeler les valeurs de $P(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ ainsi que $E(X)$.
  (b) Montrer que la variable aléatoire Y définie par
$$Y = \frac{1}{1+X}$$
  admet une espérance et la calculer.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Montrer que
$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

(3) On dispose d'un lot de 100 billets de cinquante euros dont la moitié est constituée de faux et d'une machine permettant de tester ces billets qui doit s'allumer lorsque le billet est faux.

La machine n'est pas parfaite: la probabilité de se déclencher en présence d'un faux billet est de 19/20 et celle de s'allumer malgré un vrai billet est de 3/5. On teste tous les billets et on élimine les faux. On introduit deux variables aléatoires X_1 et X_2 comptant respectivement le nombre de faux billets que l'on garde et le nombre de vrais billets éliminés.

  (a) Déterminer les lois de X_1 et X_2 et préciser leurs espérances.
  (b) Les billets éliminés seront blanchis ultérieurement mais les billets conservés sont apportés à la banque. Sachant que la banque reconnait sans erreur et n'accepte que les vrais billets, combien, en moyenne dépose-t-on d'argent?

(4) Écrire, sous `SciLab`, une fonction `y=Attente(p)` simulant une loi géométrique de paramètre p.

(5) Donner la primitive F définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0 de la fonction f définie par
$$f(t) = \frac{t^3}{(1+t^4)\sqrt{1+t^4}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(6) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale
$$I = \int_0^x t(e^t + e^{-t})\mathrm{d}t.$$

(7) À l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale
$$J = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t\,(1-\ln(t)^2)}\mathrm{d}t.$$

(8) Montrer que, pour tout x réel, $\dfrac{1}{1+e^x} \leq e^{-x}$. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{nt}}.$$

Exercice 2.

(1) (a) Calculer, pour $q \neq 1$,

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k-1}.$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1)+2.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place dans une urne U:

- 2 boules numérotées 0;
- 2^k boules numérotées k, pour chaque k entre 1 et n.

(2) On extrait alors une boule de l'urne, toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

(a) Montrer qu'il y a 2^{n+1} boules dans l'urne.
(b) Déterminer la loi de probabilité de X. (Distinguer $X = 0$ et les autres valeurs.)
(c) Calculer l'espérance mathématique de X.

(3) On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante:

- si $X = 0$ on convient de poser $Y = 0$.
- si $X = k$ (avec $1 \leq k \leq n$), on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
  On effectue alors un tirage d'une boule dans l'urne, toutes les boules restantes ayant même probabilités d'être tirées, et Y prend alors pour valeur le numéro de la boule tirée.

(a) Déterminer pour $i \in [\![0;n]\!]$ la probabilité $P(Y = i \,|\, X = 0)$.
(b) Déterminer pour $k \in [\![1;n]\!]$ et $i \in [\![0;n]\!]$, la probabilité $P(Y = i \,|\, X = k)$. (On distinguera suivant que $i = 0$, $1 \leq i < k$ ou $i \geq k$.)
(c) En déduire la loi de probabilité de Y.
(d) Vérifier que

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(Y = i) = 1.$$