ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (plus du tout Express) n°6

Solution

Exercice 1. (Question(s) de cours)

(1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Par définition d'une loi de Poisson de paramètre λ, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

De plus, on sait que X admet une espérance et que $E(X) = \lambda$.

(b) Le théorème de transfert affirme alors que Y admet une espérance si la série

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} P(X = k)$$

converge. Or,

$$\frac{1}{k+1} P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k+1)k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!},$$

ce qui est bien le terme général d'une série convergence comme multiple d'une série exponentielle (décalée). De plus,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} P(X = k) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}. \end{aligned}$$

(2) On a déjà vu cette formule. Elle repose sur le fait que

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

et sur un décalage d'indice. C'est un peu une "intégration par parties discrètes".

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X>k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) + \sum_{k=0}^{n-1} kP(X>k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - P(X>n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait (car $P(X>n)=0$).

(3) (a) Il y a 50 faux billets et 50 vrais billets. Pour un faux billet, la probabilité de ne pas être détecté est de $1/20$. Ainsi, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(50, 1/20)$. Pour un vrai billet, la probabilité d'être éliminé est $3/5$. Ainsi, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(50, 3/5)$. On connait les espérances des lois binomiales:

$$E(X_1) = 50 \times \frac{1}{20} = \frac{5}{2}, \qquad E(X_2) = 50 \times \frac{3}{5} = 30.$$

(b) Soit T le total de vrai billets apportés à la banque et acceptés et S la somme d'argent correspondante. Clairement, $S = 50T$. De plus, $T = 50 - X_2$ (il s'agit des vrais billets auquel on soustrait ceux que la machine a éliminés). Par linéarité de l'espérance

$$E(S) = 50E(T) = 50 \times (50 - E(X_2)) = 1000.$$

(4) On a écrit cette fonction en TP:

```
function y=Attente(p)
    y=1;
    while rand()>=p
        y=y+1;
    end
endfunction
```

(5) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitive. Par un résultat du cours, la primitive F de f qui s'annule en 0 est donnée par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On observe que $f(t) = \frac{1}{4} \cdot (4t^3)(1+t^4)^{-3/2}$. Par conséquent,

$$F(x) = \frac{1}{4}\left[-2(1+t^4)^{-1/2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right).$$

(6) On intègre par parties

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x t(e^t+e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= [t(e^t-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (e^t-e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= x(e^x-e^{-x}) - [e^t+e^{-t}]_0^x \\ &= x(e^x-e^{-x}) - (e^x+e^{-x}) + 2. \end{aligned}$$

(7) En posant $u=\ln(t)$, on obtient $u'(t)dt = dt/t = du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{\ln(t)\mathrm{d}t}{t(1-\ln(t)^2)} \\ &= \int_{\ln(1)=0}^{\ln(2)} \frac{u\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} \frac{-2u\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln(1-u^2)\right]_0^{\ln(2)} \\ &= -\frac{\ln(1-\ln(2)^2)}{2}. \end{aligned}$$

(8) Il est clair que $1+e^x \geq e^x$. Par passage à l'inverse, on a l'estimation demandée. Par positivité de l'intégrale, on a donc

$$0 \leq \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{nt}} \leq \int_0^n e^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-x}}{n}\right]_0^n = \frac{1-e^{-n^2}}{n} \longrightarrow 0, n\to+\infty$$

et ainsi, par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

Exercice 2.

(1) (a) Soit $q\neq 1$. Par manipulation du symbole Σ:

$$\begin{aligned} (1-q)\sum_{k=1}^n k\cdot q^{k-1} &= \sum_{k=1}^n k\cdot q^{k-1} - \sum_{k=1}^n k\cdot q^k = \sum_{h=0}^{n-1}(h+1)\cdot q^h - \sum_{k=1}^n k\cdot q^k \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} q^h + \sum_{h=0}^{n-1} h\cdot q^h - \sum_{k=0}^{n} k\cdot q^k + 0 \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} q^h + \sum_{h=0}^{n-1} h\cdot q^h - \sum_{k=0}^{n-1} k\cdot q^k - nq^n \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} q^h - nq^n = \frac{q^n-1}{q-1} - nq^n \\ &= \frac{(n+1)q^n - nq^{n+1} - 1}{q-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n k\cdot q^k = -q\frac{(n+1)q^n - nq^{n+1}-1}{(q-1)^2}.$$

(b) Il suit que, en prenant $q=2$,

$$\sum_{k=1}^n k2^k = -(1-2)\sum_{k=1}^n k2^{k-1}2 = -2\frac{(n+1)2^n - n2^{n+1}-1}{(2-1)^2} = 2^{n+1}(n-1)+2.$$

(2) (a) Il y a dans l'urne 2 boules numérotées 0 et 2^k boules numérotées k pour chaque k de 1 à n. Au total, il y a donc

$$2 + \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{n+1}$$

boules dans l'urne.

(b) Chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Comme chacune d'entre elle peut être tirée, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus,

$$P(X = 0) = 2/2^{n+1} = 2^{-n}, \qquad P(X = k) = 2^k/2^{n+1} = 2^{k-n-1},\ 1 \leq k \leq n.$$

(c) On calcule alors l'espérance, utilisant la formule obtenue en préambule:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \\ &= 0 \times P(X = 0) + \sum_{k=1}^{n} k2^{k-n-1} \\ &= 2^{-n-1} \sum_{k=1}^{n} k2^k \\ &= 2^{-n-1} \left(2^{n+1}(n-1) + 2\right) \\ &= n - 1 + 2^{-n}. \end{aligned}$$

(3) (a) Si on sait que $X = 0$ est réalisé, alors Y prend la valeur 0 avec probabilité 1 (et ne prend aucune autre valeur). Ainsi,

$$P(Y = i \,|\, X = 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0 \\ 0, & \text{si } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

(b) Pour $k \geq 1$, sachant $X = k$, il reste dans l'urne les boules de numéro compris entre 0 et $k - 1$. Il y en a 2^k. Elles sont équiprobables. Il y a 2 boules numérotées i dans le cas où $1 \leq i < k$ et il y a toujours 2 boules numérotées 0. Il suit que

$$P\left(Y = i \,|\, X = k\right) = \begin{cases} 2/2^k, & \text{si } i = 0 \\ 2^i/2^k, & \text{si } 1 \leq i < k \\ 0, & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

(c) Il apparaît que $Y(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ (Y ne peut prendre la valeur n car si $X = n$ alors on retire les boules numérotées n). D'après la formule des probabilités totales et les calculs de la questions précédente, on a

$$P(Y = i) = \sum_{k=0}^{n} P\left(Y = i \,|\, X = k\right) P\left(X = k\right).$$

On distingue alors $i = 0$ et $1 \leq i < n$. On a donc

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P\left(Y = 0 \,|\, X = 0\right) P\left(X = 0\right) + \sum_{k=1}^{n} P\left(Y = 0 \,|\, X = k\right) P\left(X = k\right) \\ &= P\left(X = 0\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} P\left(X = k\right) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} \times \frac{2^k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{n+1}{2^n}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(Y=i \,|\, X=k\right) P\left(X=k\right) = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{2^i}{2^k} \cdot \frac{2^k}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n-i}{2^{n+1}} 2^i \end{aligned}$$

(d) On applique le résultat précédent

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} P(Y=i) &= \frac{n+1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{2^{n+1}} 2^i = \frac{n+1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i.2^i \\ &= \frac{n+1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \left(\frac{2^n-1}{2-1} - 1 \right) - \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^n \left(n-2\right) + 2\right) \\ &= \frac{n+1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \left(2^n - 2\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \left(n2^n - 2 \cdot 2^n + 2\right) \\ &= \frac{2n+2+n2^n-2n-n2^n+2 \cdot 2^n - 2}{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^{n+1}} = 1, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.