ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Soutien 13 : Convergence des séries numériques

Mardi 14 Mars

Exercice 1.

(1) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n},\qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad (iii)\ \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$(iv)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}},\qquad (v)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2}{n!},\qquad (vi)\ \sum_{n\geq 1} n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

(2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(3) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n^n)}{n!}$ converge (on pourra utiliser l'inégalité $\ln(x)\leq x-1$, qu'on justifiera pour $x>0$).

(4) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right)$ converge.

(5) On cherche à montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'expression conjuguée, que

$$\forall n\geq 1,\qquad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\leq\frac{1}{n^{3/2}}$$

(b) En déduire le résultat cherché.

(6) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, où

$$w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}.$$