ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Soutien 14 : Probabilités sur des univers infinis (dénombrables)

Mardi 21 Mars

Exercice 1. Un athlète fait du saut en hauteur. On numérote les différentes hauteurs dans l'ordre. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux et que la probabilité de réussir le saut numéro n est de $1/n$. L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

(1) Quelle est la probabilité p_n qu'il s'arrête après exactement le $n-$ième saut?
(2) Calculer, après avoir justifié la convergence de la série $\sum p_n$, puis interpréter le résultat, la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Exercice 2. Rémi n'a pas beaucoup de succès avec les femmes. Suivant les conseils de son modèle - Jean-Claude Duce - il se pose donc au comptoir de son pub préféré et décide - non sans une certaine lourdeur, de solliciter chaque jeune femme s'y présentant. Il évalue la probabilité d'une réponse positive à $1/1000$. On suppose qu'une infinité de jeunes filles se présentera au comptoir et que les comportements des demoiselles susnommées sont indépendants les uns des autres.

(1) Montrer que presque sûrement il arrivera à ses fins (et que la maxime de Jean-Claude "oublie que t'as aucune chance, sur un malentendu, ça peut marcher" prend tout son sens).
(2) Que vaut le nombre moyen de tentatives nécessaires à un premier succès?

Exercice 3. Deux personnes écrivent au hasard et indépendamment l'une de l'autre un nombre de deux chiffres (entre 10 et 99). Si le numéro est le même, elles s'arrêtent, sinon elles recommencent. On suppose que les expériences sont indépendantes.

(1) Quelle est la probabilité p_n que l'expérience nécessite exactement n tentatives?
(2) Montrer, de deux façons différentes, que, presque sûrement, l'expérience s'arrête (on pourra notamment introsuire l'évènement A_n: "On a fait n tentatives et l'expérience continue").

Exercice 4. On lance successivement des paires de dé. Si, à un lancer, le total des deux dés fait 5, on gagne, si ce total fait 7, on perd. On joue jusqu'à ce que l'une des deux alternatives se produise (ou bien, jusqu'à ce que l'on meure d'ennui). Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement (sans que l'on ait succombé), puis calculer la probabilité de gagner. (On pourra considérer les évènements A_n "on obtient un total de 5 au $n-$ième coup et les $n-1$ premières parties n'ont donné ni 5, ni 7).