Soutien 15 : Espaces Vectoriels

Mardi 28 Mars

Exercice 1.

(1) Donner une base des sous-espaces suivants et préciser leur dimension

$$F = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad x - 2y + 4z = 0 \right\}, \quad G = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \quad 3x - 9t = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad 2a - 5b + c = 0 \text{ et } b + c = 0 \right\}.$$

(2) Donner l'équation (ou le système d'équations) caractérisant les sous-espaces suivants

$$F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 2. Écrire les matrices (dans les bases canoniques correspondantes) des applications suivantes

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ x + 4z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f_2 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$f_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \longmapsto 2x - y + z + 3t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

(1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?
(3) On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = u\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = 2u\}.$$

  (a) Trouver une base $\{u\}$ de E_1 et une base $\{v, w\}$ de E_2.
  (b) Montrer que $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
  (c) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.