Soutien 16 : V.A. finies. Lois usuelles finies.

Mardi 25 Avril

Exercice 1. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.4, \quad P(X = 3) = 0.2.$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z et préciser son espérance.
(2) On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y. (On pourra considérer dans la suite que Z et X sont indépendantes.)
(3) Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 2. (Josef Fritzl, le retour)
Notre ami Josef descend une fois de plus les marches de son escalier menant à sa cave (supposé infini). À chaque pas, celui-ci descend

- ou bien une seule marche, avec probabilité p;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les pas sont indépendants les uns des autres. On observe n pas de Josef, et on note X_n le nombre de fois où notre homme a descendu une seule marche, et Y_n le nombre de marches franchies.

(1) Quelle est la loi de X_n?
(2) Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Exercice 3. On considère une urne contenant n boules dont 2 noires et le reste de boules blanches. On tire les boules une à une sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire et Y celle égale au rang d'apparition de la seconde boule noire.

(1) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
(2) Pour $i \in X(\Omega)$, montrer que
$$P(X = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.$$
(3) Pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, déterminer $P(Y = j | X = i)$.
(4) En déduire que
$$P(Y = j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$
(5) Calculer l'espérance de X.